Gebrochene Potenzen von Operatoren und Anwendungen

—

Ein Funktionalkalkül für nicht-negative Operatoren

Diplomarbeit

Matthias Heymann
Universität Hannover

Oktober 2001

zweite, durchgesehene Auflage

„Integrale muß man streicheln.
Integrale muß man liebhaben.
Dann lösen sie sich wie von selbst.“

Prof. Hermann Schulz,
Institut für theoretische Physik,
Universität Hannover

Abstract

In this thesis we develop a very powerful operational calculus for operators of class $\mathcal{K}$, the set of all closed operators $A : D(A) \subset X \to X$ (where X is a Banach space) fulfilling $(0, \infty) \in \varrho(A)$ and $\sup_{\lambda>0} \|\lambda R(\lambda; A)\| < \infty$ (then $-A$ is called non-negative). With this, operator equations of the form

$$c\, I + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R\big(\lambda_i; A\big)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) = 0$$

can be deduced from the corresponding equation related to the multiplication operators $A_s \in \mathcal{K}$, $A_s x := -s \cdot x$ $(s > 0)$, without any restrictive conditions, so that only a scalar equation has to be proven.

In the case that A is densely defined, even equations of the form

$$c\, x + \sum_{p=1}^{P} c_p\, (-A)^{\alpha_p} x + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i; -(-A)^{\varepsilon_{n,i}})^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda})\, (-A)^{\beta_n} x = 0$$

can be treated. Here we have $c \in \mathbb{C}$, for $n = 1, \ldots, N$ $m_n \in \mathbb{N}$, $\vec{k}_n \in \mathbb{R}_+^{m_n}$, μ_n a complex Borel-measure with $\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \vec{\lambda}^{-\vec{k}_n} d|\mu_n|(\vec{\lambda}) < \infty$ and in the second case additionally $\vec{\varepsilon}_n \in (0, 1]^{m_n}$ and $\beta_n \geq 0$ as well as $c_p \in \mathbb{C}$ and $\alpha_p \geq 0$ for $p = 1, \ldots, P$.

With this operational calculus we extend results of H.W. Hövel and U. Westphal [3] on fractional powers $(-A)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, of densely defined operators of class $\mathcal{K}$. We provide a complete characterization for all values of $\alpha > 0$ and demonstrate that one of the basic methods of [3] could not be applied to derive results for $\alpha \geq 1$.

Finally, we illustrate how this operational calculus can be used to generalize results from the literature. We take as our example the characterisation of convergency rates in a generalized Abelian mean ergodic theorem for semigroup generators presented in [9]. We apply the operational calculus to extend this work to all densely defined operators of class $\mathcal{K}$.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein sehr leistungsfähiger Funktionalkalkül für Operatoren der Klasse $\mathcal{K}$ entwickelt, das ist die Menge aller abgeschlossenen Operatoren $A : D(A) \subset X \to X$ (für einen Banachraum X) mit $(0, \infty) \in \varrho(A)$ und $\sup_{\lambda>0} \|\lambda R(\lambda; A)\| < \infty$ ($-A$ heißt dann nicht-negativ). Damit können Operatorgleichungen der Form

$$c\,I + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R\big(\lambda_i; A\big)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) = 0$$

ohne restriktive Voraussetzungen auf die entsprechende Gleichung für die Multiplikationsoperatoren $A_s \in \mathcal{K}$, $A_s x := -s \cdot x$ $(s > 0)$, zurückgeführt werden, so daß nur noch eine skalare Gleichung bewiesen werden muß.

Ist A zusätzlich dicht definiert, so werden sogar Gleichungen der Form

$$c\,x + \sum_{p=1}^{P} c_p\,(-A)^{\alpha_p} x + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i; -(-A)^{\varepsilon_{n,i}})^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda})\,(-A)^{\beta_n} x = 0$$

erfaßt. Dabei ist $c \in \mathbb{C}$, für $n = 1, \ldots, N$ $m_n \in \mathbb{N}$, $\vec{k}_n \in \mathbb{R}_+^{m_n}$, μ_n ein komplexes Borel-Maß mit $\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \vec{\lambda}^{-\vec{k}_n} d|\mu_n|(\vec{\lambda}) < \infty$ und im zweiten Fall zusätzlich $\vec{\varepsilon}_n \in (0, 1]^{m_n}$ und $\beta_n \geq 0$ sowie $c_p \in \mathbb{C}$ und $\alpha_p \geq 0$ für $p = 1, \ldots, P$.

Mit Hilfe dieses Kalküls wird die Arbeit [3] von H.W. Hövel und U. Westphal über einen Zugang zu gebrochenen Potenzen $(-A)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, von dicht definierten Operatoren der Klasse $\mathcal{K}$ erweitert. Wir stellen eine vollständige Charakterisierung für alle Werte $\alpha > 0$ vor und zeigen auch, daß ein Ansatz in [3] nicht benutzt werden konnte, um die gewünschten Ergebnisse für $\alpha \geq 1$ zu erzielen.

Schließlich wird gezeigt, wie man mit Hilfe des Funktionalkalküls Ergebnisse aus der Literatur verallgemeinern kann. Als Beispiel dient uns hier die Charakterisierung von Konvergenzraten in einem verallgemeinerten Abelschen Ergodensatz im Mittel für Halbgruppenerzeuger, wie sie in [9] vorgestellt wurde. Wir verwenden den Funktionalkalkül, um diese Arbeit auf alle dicht definierten Operatoren der Klasse $\mathcal{K}$ zu erweitern.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Ist $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X, so steht A^n für die n-fache Hintereinanderausführung dieses Operators, und es gelten offensichtlich die beiden Potenzgesetze

$$A^m A^n = A^{m+n} \qquad \text{sowie} \qquad (A^m)^n = A^{mn} \qquad (m, n \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Im Zusammenhang mit der Lösbarkeit der Differentialgleichung

$$\tfrac{d^n}{dt^n} u(t) - Au(t) = 0, \qquad u(0) = u_0$$

—mit formaler Lösung $u(t) = e^{A^{1/n}t} u_0$—begann man, sich die Frage nach möglichen Definitionen von gebrochenen Potenzen A^α $(\alpha > 0)$ des Operators A zu stellen, und sogar komplexe Werte für α mit $\operatorname{Re} \alpha > 0$ wurden untersucht.

Forderungen, die man an mögliche Definitionen von A^α stellt, sind die Gültigkeit der Potenzgesetze (1) für beliebige Werte $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ und natürlich die naheliegende Forderung, daß für $\alpha \in \mathbb{N}$ der definierte Operator A^α wieder die α-fache Hintereinanderausführung von A ergibt.

Weiter muß man sich die Frage stellen, welche Eigenschaften man von dem Operator A fordern muß, damit eine solche Definition sinnvoll ist—bei der Definition gebrochener Potenzen von negativen Zahlen stößt man schließlich auch auf Probleme. In der Praxis betrachtet man häufiger Operatoren A, die eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe $\{e^{At};\ t \geq 0\} \subset L(X)$, $\sup_{t \geq 0} \|e^{At}\| < \infty$, erzeugen, und man hat festgestellt, daß eine sinnvolle Definition gebrochener Potenzen dann i. a. nur für den Operator $(-A)$ möglich ist. Unter anderem aus diesem Grund findet man in der Literatur häufig Betrachtungen von Operatoren $(-A)^\alpha$ anstelle von A^α; wir wollen uns diesen Autoren anschließen.

Eine wegweisende Serie von sechs Arbeiten über gebrochene Potenzen von Operatoren hat H. Komatsu mit [1] veröffentlicht. Er betrachtet—wie auch A.V. Balakrishnan in [2]—eine weitaus größere Klasse von Operatoren, nämlich die der Klasse $\mathcal{K}$ aller abgeschlossenen Operatoren A mit

$$(0, \infty) \subset \varrho(A) \qquad \text{und} \qquad \sup_{\lambda > 0} \|\lambda R(\lambda; A)\| < \infty.$$

$-A$ heißt dann nicht-negativ.

Seine Definition ist verhältnismäßig abstrakt: Er definiert erst einen Operator J_α auf einer Teilmenge des späteren Definitionsbereiches $D((-A)^\alpha)$ von $(-A)^\alpha$ und definiert dann $(-A)^\alpha$ als dessen kleinste abgeschlossene Erweiterung. Nachteil dieses Verfahrens ist, daß man nicht auf ganz $D((-A)^\alpha)$ eine explizite Darstellung von $(-A)^\alpha$ besitzt. Jedoch zeigte Komatsu in [1, II, Theorem 2.10] für dicht definierte Operatoren A die Formel

$$(-A)^\alpha x = \operatorname*{s-lim}_{N\to\infty} C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^m x \, d\lambda \quad \text{für} \quad \forall x \in D((-A)^\alpha) \tag{2}$$

$(0 < \alpha < m \in \mathbb{N})$, wobei dieser Grenzwert genau dann existiert, wenn $x \in D((-A)^\alpha)$ ist. Hierbei ist $C_{\alpha,m}$ eine von α und m abhängige positive Normierungskonstante.

H.W. Hövel und U. Westphal zeigten dann 1972 in ihrer Arbeit [3] (für ähnliche Arbeiten über Halbgruppenerzeuger siehe auch [4] und [5]), daß man für dicht definierte Operatoren $A \in \mathcal{K}$ Gleichung (2) auch als Ausgangspunkt wählen und von ihm ausgehend die Abgeschlossenheit der Operatoren $(-A)^\alpha$ und die Potenzgesetze zeigen kann. Dazu mußten sie als entscheidenden Schritt in ihrer Arbeit zu jedem Operator A Operatoren $T_{\alpha,m,N} \in L(X)$ $(0 < \alpha < m \in \mathbb{N},\ N > 0)$ finden mit $\text{s-lim}_{N\to\infty} T_{\alpha,m,N}x = C_{\alpha,m} \cdot x$ und

$$(-A)^\alpha \, T_{\alpha,m,N} \, x = \int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^m d\lambda \, x \tag{3}$$

für $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$, $N > 0$ und alle $x \in X$. Sie wählten als Ansatz

$$T_{\alpha,m,N} = \int_0^\infty p_{\alpha,m}(\lambda) N R(N\lambda;A) \, d\lambda, \tag{4}$$

wobei $p_{\alpha,m}$ eine von A unabhängige Funktion mit $\lambda^{-1}|p_{\alpha,m}(\lambda)| \in L(0,\infty)$ ist. Damit waren sie jedoch nur für $0 < \alpha < 1 = m$ erfolgreich. So mußten sie sich in ihrer gesamten Arbeit auf diesen Fall beschränken, und bis heute war es nicht gelungen, Operatoren $T_{\alpha,m,N}$ für die übrigen Fälle zu finden.

Diese Lücke soll nun geschlossen werden: Erstens wird in Anhang A gezeigt, daß es Werte $1 \le \alpha < m \in \mathbb{N}$ gibt, für die keine Funktion $p_{\alpha,m}$ mit $\lambda^{-1}|p_{\alpha,m}(\lambda)| \in L(0,\infty)$ mit obigem Ansatz zum Erfolg führt, und zweitens soll gleich eine Lösung des Problems in Form eines funktionierenden allgemeineren Ansatzes präsentiert werden.

Dies soll erst in Kapitel 3 geschehen. Bei dem Beweis von Gleichung (3) für $m > 1$ ergibt sich nämlich folgendes Problem: Ausgangspunkt zum Beweis dieser

Formel ist die Gleichung

$$\begin{aligned} &\int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^{m_1} d\lambda\ T_{\alpha,m_2,M}\, x \\ = &\int_0^M \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^{m_2} d\lambda\ T_{\alpha,m_1,N}\, x. \end{aligned} \tag{5}$$

($0 < \alpha < m_1, m_2$, $M, N > 0$, $x \in X$). Für Operatoren der Klasse $\mathcal{K}$ gab es jedoch bis jetzt nicht viele Möglichkeiten, Operatorgleichungen der Form (5) zu zeigen, falls $T_{\alpha,m,N}$ wieder eine Integralform ähnlich wie in (4) hat.

Der gängigste Weg, die Faltungsmethode—sie wird von Hövel und Westphal, aber auch von Komatsu und Balakrishnan in ihren Arbeiten verwandt—, besteht darin, die zu zeigende Operatorgleichung für die Multiplikationsoperatoren $A_a x := -a \cdot x$ ($a > 0$) zu zeigen, wobei die Operatorgleichung zu einer skalaren Gleichung mit $\frac{1}{\lambda+a}$ anstelle von $R(\lambda;A)$ wird, und sie anschließend auf die Form

$$\int_0^\infty f_1(\lambda) R(\lambda;A)x\, d\lambda = \int_0^\infty f_2(\lambda) R(\lambda;A)x\, d\lambda \tag{6}$$

zu bringen. Da dann auch diese Gleichung für die Multiplikationsoperatoren gilt, besagt (6) in diesem Fall, daß die Stieltjes-Transformierten von f_1 und f_2 übereinstimmen, also auch die Funktionen selber, so daß (6) und folglich auch die Ausgangsoperatorgleichung für alle Operatoren $A \in \mathcal{K}$ bewiesen ist. In Einzelfällen kann $f_1 = f_2$ auch direkt gezeigt werden.

Was diese Methode allerdings mühsam und häufig sogar völlig unbrauchbar macht, ist die Reihe von sehr komplizierten Abschätzungen, die beim Umformen zu Gleichung (6) bewiesen werden müssen, wenn zwei Integrale zu einem zusammengefaßt werden sollen (siehe [3, Lemma 2.3]), und daß i. a. nur dann Aussicht auf eine solche Umformung besteht, wenn in den Ausgangsintegralen keine höheren Potenzen $R(\lambda;A)^n$ ($n \geq 2$) auftauchen, wie dies zum Beispiel in Gleichung (5) für $m_1 > 1$ oder $m_2 > 1$ der Fall ist.

Stehen in der Ausgangsgleichung gar drei Integrale auf jeder Seite, dann müßte dieser Vorgang in zwei Schritten geschehen, mit wachsendem Schwierigkeitsgrad. Dieses Problem tauchte ebenfalls in [3, Theorem 4.2] auf, konnte dort jedoch letztlich umgangen werden.

Folglich verlangt der Beweis von Gleichung (5) nach einer vollkommen neuen Beweismethode, die in Kapitel 2 entwickelt und in Kapitel 5 verfeinert werden soll. Es wird ein sehr leistungsfähiger Funktionalkalkül entwickelt, dessen Beweis auf einer Idee von F. Hirsch in seiner Arbeit [6] basiert. Dieser verwendete anstelle der Faltungsmethode die Funktionalmethode, er verwandelte also die zu beweisenden Operatorgleichungen mit dem Satz von Hahn-Banach in Funktionalgleichungen und bewies diese dann letztlich mit der Laplacetransformation für Distributionen. Leider erfaßt aber weder die Arbeit von Hirsch noch der darauf aufbauende weitergehende Artikel [7] von Martínez und Sanz Integrale mit höheren Potenzen der Resolventen im Integranden. Ebenso werden dort Mehrfachintegrale nicht in der benötigten Allgemeinheit berücksichtigt.

Der hier vorgestellte Kalkül umgeht alle genannten Probleme vollständig, und die einzige Voraussetzung, die bei seiner Anwendung noch zu überprüfen ist, ist meist auf den ersten Blick zu erkennen und ohnehin notwendig, damit garantiert ist, daß die zu zeigende Operatorgleichung überhaupt einen Sinn ergibt.

Konkret besagt er in seiner ersten Fassung insbesondere, daß Operatorgleichungen, deren Gleichungsseiten nur aus der Summe eines Vielfachen der Identität mit beliebig vielen Verkettungen von Operatoren der Form

$$\int_0^\infty R(\lambda; A)^n \, d\mu(\lambda)$$

bestehen, wobei die Existenz dieser Integrale durch

$$\int_0^\infty \lambda^{-n} d|\mu|(\lambda) < \infty$$

gesichert sein muß, nur für die Multiplikationsoperatoren gezeigt werden müssen, und dann gelten sie ohne weitere Voraussetzungen auch für alle Operatoren der Klasse $\mathcal{K}$, ja sogar für beliebige Resolventenfamilien $\{R(\lambda);\ \lambda > 0\}$ mit $\sup_{\lambda>0} \|\lambda R(\lambda)\| < \infty$. Dabei müssen die Maße μ nicht einmal eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzen, was in Kapitel 3 im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$, aber auch in Kapitel 6 Anwendung findet.

Nachdem eine vorläufige Version dieses Werkzeuges in Kapitel 3 für die Verallgemeinerung von [3] verwendet wurde, wird sie für dicht definierte Operatoren A in Kapitel 5 noch wesentlich in dem Sinne verbessert, daß nun auch in mehrfacher Hinsicht gebrochene Potenzen erfaßt werden: Es werden nun auch gebrochene Potenzen der Resolventen zugelassen, diese dürfen sich auf verschiedene Potenzen $-(-A)^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ des gleichen Operators A beziehen, und es dürfen Operatoren $(-A)^\alpha$ $(\alpha > 0)$ auch beliebig mit den Integralen verkettet werden oder als einzelne Summanden auftauchen.

Somit ist die erweiterte Fassung des Kalküls nicht mehr nur auf stetige Operatoren beschränkt und wird in der Praxis in vielen Situationen zum Pendant des Schwartzschen Funktionalkalküls für Erzeuger gleichmäßig beschränkter Halbgruppen (siehe dazu zum Beispiel [8]).

Als wesentlicher Bestandteil des Beweises der allgemeinen Version wird in Kapitel 4 die gebrochene Potenz $(-A)^\alpha$ durch die gebrochene Potenz der Yosida-Approximation $A_\lambda := A\lambda R(\lambda; A)$ approximiert, denn $(-A_\lambda)^\alpha$ ist stetig und wird von der ersten Version des Funktionalkalküls erfaßt.

Wie dieser Kalkül dazu verwendet werden kann, um bestehende Beweise auf die dicht definierten Operatoren der Klasse $\mathcal{K}$ zu verallgemeinern, soll im abschließenden Kapitel 6 demonstriert werden, hier anhand der Arbeit [9] von U. Westphal über die Charakterisierung der Konvergenzraten eines auf gebrochene Potenzen verallgemeinerten Abelschen Ergodensatzes im Mittel, in der nur solche Operatoren $A \in \mathcal{K}$ betrachtet wurden, die eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe erzeugen.

Kapitel 1

Hilfsmittel aus der Distributionentheorie

In Kapitel 2 wird als ein entscheidendes Beweismittel die Laplacetransformation von temperierten Distributionen verwendet werden. Deren Definition und wichtigste Eigenschaften sollen nun zusammengefaßt werden. Sie wurden dem Standardwerk [10] von A.H. Zemanian entnommen.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ heißt bekanntlich Laplace-transformierbar, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\int_0^\infty |f(x)| e^{-cx} dx < \infty$, und die Laplacetransformierte ist dann für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathsf{Re}\, z > c$ definiert durch

$$L(f)(z) := \widehat{f}(z) := \int_0^\infty f(x) e^{-zx}\, dx.$$

$L(f)$ ist eine holomorphe Funktion, und es gilt der Eindeutigkeitssatz

$$L(f) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f = 0 \quad \text{f.ü.}$$

Um die Voraussetzung des Eindeutigkeitssatzes zu zeigen, reicht es wegen der Holomorphie, $L(f)(s) = 0$ für alle reellen $s > c$ aus einer Punktmenge mit Häufungspunkt $s_0 > c$ zu zeigen.

Der Begriff der Laplacetransformation kann nun auf eine bestimmte Klasse von Distributionen verallgemeinert werden.

Dazu definiert man zuerst den Raum der temperierten Distributionen, und zwar wie folgt: Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ aller stark fallenden Funktionen ist die Menge der Funktionen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 : \; p_{n,k}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n \varphi^{(k)}(x)| < \infty,$$

versehen mit der von der Halbnormenschar $\{p_{n,k};\ n,k \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie. Der Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ der temperierten (oder auch „schwach wachsenden") Distributionen ist dann der topologische Duale von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, also die Menge aller linearen Funktionale $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ mit

$$\exists C > 0\ \exists m,l \in \mathbb{N}_0\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) :\ |\langle F, \varphi\rangle| \leq C \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{l} p_{n,k}(\varphi).$$

Man kann sich klarmachen, daß man $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ als Unterraum des Distributionenraumes $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ auffassen kann, und nennt eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ Laplacetransformierbar, wenn

- $\operatorname{supp} F \subset [0, \infty)$,
- $\exists c \in \mathbb{R} :\ e^{-c\cdot} F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Dabei ist $\langle e^{-c\cdot} F, \varphi\rangle := \langle F, e^{-c\cdot}\varphi\rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$. Insbesondere ist die zweite Bedingung für alle $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mit $c = 0$ erfüllt.

Die Laplacetransformierte von F wird dann für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathsf{Re}\, z > c_0$, wobei c_0 das Infimum aller möglichen Werte für c ist, definiert durch

$$L(F)(z) := \widehat{F}(z) := \langle e^{-ct} F(t), \lambda(t) e^{-(z-c)t}\rangle \qquad (\mathsf{Re}\, z > c > c_0).$$

Die Schreibweise $F(t)$ soll andeuten, daß die Ausdrücke e^{-ct} und $\lambda(t)e^{-(z-c)t}$ als Funktionen von t aufgefaßt werden sollen. Hierbei ist λ eine beliebige Funktion aus $C^\infty(\mathbb{R})$, die nach unten beschränkten Träger hat und die in einer Umgebung von $[0, \infty)$ den Wert 1 annimmt.

Auch $L(F)$ ist dann holomorph, und es gilt der Eindeutigkeitssatz

$$L(F) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F = 0.$$

Die distributionelle Laplacetransformation ist eine Erweiterung der klassischen, denn ist eine Funktion klassisch Laplace-transformierbar, dann ist die zugehörige reguläre Distribution auch distributionell Laplace-transformierbar mit der gleichen Transformierten.

Man kann beide Formen der Laplacetransformation auch auf Funktionen bzw. Distributionen ausweiten, deren Träger nach unten nur durch eine beliebige reelle Zahl beschränkt zu sein braucht, dies ist in dieser Arbeit jedoch nicht von Bedeutung.

Kapitel 2

Der Funktionalkalkül für Resolventenintegrale

2.1 Einige Schreibweisen und Bezeichnungen

Wir führen nun einige Kurzschreibweisen ein, um die ohnehin schon überladene Notation dieses Kapitels etwas zu entlasten.

Wie üblich sei für $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ $|\vec{k}| := k_1 + \cdots + k_m$ und $D^{\vec{k}} := \partial_1^{k_1} \cdots \partial_m^{k_m}$.

Neu führen wir für einen Vektor $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{R}^m$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Schreibweise $\vec{k} - c := (k_1 - c, \ldots, k_m - c)$ ein. Diese Schreibweise wird deshalb sehr hilfreich sein, weil wir es oft mit Vektoren unterschiedlicher Dimension zu tun haben werden.

Außerdem definieren wir für $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ und $\vec{k} \in \mathbb{R}^m$ $\vec{\lambda}^{\vec{k}} := \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_m^{k_m}$. Hierbei sei $\mathbb{R}_+$ das offene Intervall $(0, \infty)$.

Als Resolventenfamilie bezeichnen wir eine Familie $R = \{R(\lambda);\ \lambda > 0\} \subset L(X)$ stetiger Operatoren eines Banachraumes X in sich selbst, für die die Resolventengleichung

$$R(\lambda)R(\mu) = -\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} \qquad \forall \lambda, \mu > 0, \quad \lambda \neq \mu$$

gilt. Die Familie R heißt M-beschränkt, falls

$$\sup_{\lambda > 0} \|\lambda R(\lambda)\| \leq M < \infty.$$

Man sieht schnell, daß für jede M-beschränkte Resolventenfamilie R die Funktion $\lambda \mapsto R(\lambda)$ unendlich oft differenzierbar ist mit

$$\partial_\lambda^j R(\lambda) = (-1)^j j!\, R(\lambda)^{j+1} \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

2.2 Definition und Rechenregeln

Wir präzisieren nun mit Definition 1 und Satz 1 die in der Einleitung bereits angedeutete Hauptaussage dieses Kapitels:

Definition 1. *Sei $\mathcal{G}$ der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, die sich in der Form*

$$f(a) = c + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \Big(\frac{1}{\lambda_i + a}\Big)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \qquad (a > 0) \tag{2.1}$$

darstellen lassen, wobei $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante und für alle $n = 1, \ldots, N \in \mathbb{N}_0$ $m_n \in \mathbb{N}$, $\vec{k}_n \in \mathbb{N}^{m_n}$ und μ_n ein komplexes Borel-Maß auf $\mathbb{R}_+^{m_n}$ mit $\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \vec{\lambda}^{-\vec{k}_n}\, d|\mu_n|(\vec{\lambda}) < \infty$ ist.

Definiere dann für jede auf einem Banachraum X definierte M-beschränkte Resolventenfamilie $R = \{R(\lambda);\ \lambda > 0\}$ und jedes $f \in \mathcal{G}$ den Operator $\mathcal{H}_R(f) \in L(X)$ durch

$$\mathcal{H}_R(f) := c\, I + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}). \tag{2.2}$$

Bemerkung: Ist $R(\cdot) = R(\cdot\,; A)$ für ein $A \in \mathcal{K}$, so sind sogar Werte $\vec{k}_n \in \mathbb{R}_+^{m_n}$ zugelassen. Der Beweis dazu soll hier jedoch nicht vorgeführt werden; er verläuft analog zu dem von Satz 9 in Kapitel 5.

Die Hauptschwierigkeit besteht nun darin, die nichttriviale Aussage zu zeigen, daß der eben definierte Operator $\mathcal{H}_R(f)$ wohldefiniert ist, daß also der definierende Term in (2.2) unabhängig von der Darstellung (2.1) von f ist. Die in der Praxis ebenfalls wichtigen Rechenregeln von Satz 1 (ii) sind dagegen verhältnismäßig leicht einzusehen; ihr Beweis wird noch in diesem Abschnitt vorgeführt werden.

Satz 1. *(i) Der Operator $\mathcal{H}_R(f)$ ist wohldefiniert.*

(ii) Für $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{G}$ sind auch $\alpha f_1 + \beta f_2$ und $f_1 \cdot f_2$ in $\mathcal{G}$, und es gelten die Rechenregeln

a) $\mathcal{H}_R(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{H}_R(f_1) + \beta \mathcal{H}_R(f_2)$,

b) $\mathcal{H}_R(f_1 \cdot f_2) = \mathcal{H}_R(f_1) \circ \mathcal{H}_R(f_2)$.

Um Satz 1 zu beweisen, werden wir im gesamten nächsten Abschnitt Satz 2 zeigen, aus dem dann, wie gleich gezeigt wird, Satz 1 unmittelbar folgt.

Satz 2. *Sei X ein Banachraum und $R := \{R(\lambda);\ \lambda > 0\}$ eine M-beschränkte Resolventenfamilie.*

Sei $N \in \mathbb{N}$, und für jedes $n = 1, \ldots, N$ sei $m_n \in \mathbb{N}$, $\vec{k}_n \in \mathbb{N}^{m_n}$ und μ_n ein komplexes Borel-Maß auf $\mathbb{R}_+^{m_n}$ mit $\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \vec{\lambda}^{-\vec{k}_n}\, d|\mu_n|(\vec{\lambda}) < \infty$. Ferner gebe es eine Menge $M \subset \mathbb{R}_+$ mit Häufungspunkt in $\mathbb{R}_+$ derart, daß für alle $a \in M$

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \Big(\frac{1}{\lambda_i + a}\Big)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) = 0 \tag{2.3}$$

ist. Dann ist

$$H_R := \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) = 0. \tag{2.4}$$

Beweis von Satz 1 aus Satz 2:
(i) Seien

$$c + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \Big(\frac{1}{\lambda_i + a}\Big)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \quad \text{und} \quad c' + \sum_{l=1}^{N'} \int_{\mathbb{R}_+^{m'_l}} \prod_{j=1}^{m'_l} \Big(\frac{1}{\lambda_j + a}\Big)^{k'_{l,j}} d\mu'_l(\vec{\lambda}) \tag{2.5}$$

zwei verschiedene Darstellungen von einer Funktion $f \in \mathcal{G}$. Mit $a \to \infty$ erhält man $c = c'$, und folglich hat die Differenz der beiden Ausdrücke, die für $\forall a > 0$ den Wert 0 annimmt, eine Form wie in (2.3). Also kann Satz 2 angewendet werden, und die resultierende Gleichung (2.4) besagt gerade, daß die Differenz der beiden den Ausdrücken (2.5) zugeordneten Operatoren der Nulloperator ist, was zu zeigen war.

(ii) a) Die Gleichung $\mathcal{H}_R(f_1 + f_2) = \mathcal{H}_R(f_1) + \mathcal{H}_R(f_2)$ ist klar, die Gleichung $\mathcal{H}_R(\alpha f) = \alpha \mathcal{H}_R(f)$ zeigt man mit $\alpha \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n = \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d(\alpha\mu_n)$.

(ii) b) Haben f_1 und f_2 die Darstellungen (2.5), so gilt

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_R(f_1) \circ \mathcal{H}_R(f_2) \\
&= \Big[c\, I + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda})\Big] \circ \Big[c'\, I + \sum_{l=1}^{N'} \int_{\mathbb{R}_+^{m'_l}} \prod_{j=1}^{m'_l} R(\lambda_j)^{k'_{l,j}} d\mu'_l(\vec{\lambda})\Big] \\
&= c\, c'\, I + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i)^{k_{n,i}} d(c'\mu_n)(\vec{\lambda}) + \sum_{l=1}^{N'} \int_{\mathbb{R}_+^{m'_l}} \prod_{j=1}^{m'_l} R(\lambda_j)^{k'_{l,j}} d(c\mu'_l)(\vec{\lambda}) \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{N} \sum_{l=1}^{N'} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n} \times \mathbb{R}_+^{m'_l}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i)^{k_{n,i}} \prod_{j=1}^{m'_l} R(\lambda'_j)^{k'_{l,j}} d(\mu_n \otimes \mu'_l)(\vec{\lambda}, \vec{\lambda}')
\end{aligned}$$

$$= \mathcal{H}_R\Big[c\,c' + \sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}}\prod_{i=1}^{m_n}\big(\tfrac{1}{\lambda_i+a}\big)^{k_{n,i}}d(c'\mu_n)(\vec{\lambda}) + \sum_{l=1}^{N'}\int_{\mathbb{R}_+^{m'_l}}\prod_{j=1}^{m'_l}\big(\tfrac{1}{\lambda_j+a}\big)^{k'_{l,j}}d(c\mu'_l)(\vec{\lambda})$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N'}\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}\times\mathbb{R}_+^{m'_l}}\prod_{i=1}^{m_n}\big(\tfrac{1}{\lambda_i+a}\big)^{k_{n,i}}\prod_{j=1}^{m'_l}\big(\tfrac{1}{\lambda'_j+a}\big)^{k'_{l,j}}d(\mu_n\otimes\mu'_l)(\vec{\lambda},\vec{\lambda}')\Big]$$

$$= \mathcal{H}_R(f_1 \cdot f_2).$$ □

2.3 Beweis der Wohldefiniertheit

Beweisen wir nun also Satz 2. Zunächst muß die Zuordnung $R(\cdot) \mapsto \big(\vec{\lambda} \mapsto \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i)^{k_{n,i}}\big)$ linearisiert werden. Dies geschieht für $\vec{k}_n = (1,\ldots,1)$ mit Hilfe des nun definierten Operators Δ^{m_n-1} und beruht auf der mehrfachen Anwendung der Resolventengleichung. Die Funktionsweise dieser Operatoren wird im darauffolgenden Lemma 1 deutlich werden.

Definition 2. *(i) Die linearen Operatoren $\Delta^p : C^\infty(\mathbb{R}_+) \to C^\infty(\mathbb{R}_+^{p+1})$, $p \in \mathbb{N}_0$, seien für alle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ und alle $\lambda_i > 0$ $(i = 1,\ldots,p+1)$ iterativ definiert durch*

$$\begin{aligned}
\Delta^0\varphi &:= \varphi,\\
(\Delta\varphi)(\lambda_1,\lambda_2) &:= \begin{cases} -\frac{\varphi(\lambda_1)-\varphi(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}, & \lambda_1 \neq \lambda_2,\\ -\varphi'(\lambda_1), & \lambda_1 = \lambda_2,\end{cases}\\
(\Delta^{p+1}\varphi)(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+2}) &:= \big[\Delta\big((\Delta^p\varphi)(\lambda_1,\ldots,\lambda_p,\cdot)\big)\big](\lambda_{p+1},\lambda_{p+2}) \qquad (p \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

(ii) Für alle $a \geq 0$ sei $u_a \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ definiert durch $u_a(\lambda) := \frac{1}{\lambda+a}$ $(\lambda > 0)$.

Es sei angemerkt, daß $(\Delta^p\varphi)(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+1})$ bis auf das Vorzeichen $(-1)^p$ gerade die dividierte Differenz p-ter Ordnung von φ an den Stützstellen $\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+1}$ ist. Daß dabei Δ^p auch tatsächlich in den Raum $C^\infty(\mathbb{R}_+^{p+1})$ abbildet und damit der Iterationsschritt in der Definition i. a. überhaupt sinnvoll ist, wird in Lemma 2 bewiesen. Zuvor jedoch zur Motivation Lemma 1, auf das Lemma 2 nicht zurückgreift.

Lemma 1. *Für alle $p \in \mathbb{N}_0$, $a \geq 0$, $x \in X$ und $x^* \in X^*$ gilt*

(i) $(\Delta^p u_a)(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+1}) = \prod_{i=1}^{p+1} u_a(\lambda_i)$

(ii) $\big(\Delta^p\langle R(\cdot)x, x^*\rangle\big)(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+1}) = \big\langle \prod_{i=1}^{p+1} R(\lambda_i)\,x, x^*\big\rangle.$

Beweis: Es reicht, (ii) zu zeigen, denn mit $X = \mathbb{R}$, $R(\lambda)x := \frac{1}{\lambda+a}\cdot x \quad \forall x \in X$, $x^* = id_{\mathbb{R}}$ und $x = 1$ ergibt sich dann die Aussage (i) als Spezialfall von (ii).

Für $p = 0$ gilt die Behauptung (ii) offensichtlich, für $p = 1$ folgt sie direkt aus der Resolventengleichung

$$\begin{aligned}
\big(\Delta\langle R(\cdot)x, x^*\rangle\big)(\lambda_1, \lambda_2) &= \Big\langle -\tfrac{R(\lambda_1)-R(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}x, x^*\Big\rangle \\
&= \langle R(\lambda_1)R(\lambda_2)x, x^*\rangle \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2), \\
\big(\Delta\langle R(\cdot)x, x^*\rangle\big)(\lambda_1, \lambda_2) &= -\partial_{\lambda_1}\langle R(\lambda_1)x, x^*\rangle = \big\langle R(\lambda_1)^2 x, x^*\big\rangle \quad (\lambda_1 = \lambda_2),
\end{aligned}$$

dann schließt man mit vollständiger Induktion:

$$\begin{aligned}
&\big(\Delta^{p+1}\langle R(\cdot)x, x^*\rangle\big)(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+2}) \\
&\qquad = \Big[\Delta_y\Big(\big(\Delta_z^p\langle R(z)x, x^*\rangle\big)(\lambda_1, \dots, \lambda_p, y)\Big)\Big](\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}) \\
&\qquad = \Big(\Delta_y\Big\langle R(y)\prod_{i=1}^{p} R(\lambda_i)x, x^*\Big\rangle\Big)(\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}) \\
&\qquad = \Big\langle \prod_{i=1}^{p+2} R(\lambda_i)x, x^*\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Dabei geben die unteren Indizes am Operator Δ_y bzw. Δ_z^p an, als Funktion welcher Variablen der darauffolgende Term interpretiert werden soll. Im zweiten und dritten Schritt wurden nacheinander Induktionsvoraussetzung und Induktionsanfang benutzt. □

Im Falle $\vec{k}_n \neq (1, \dots, 1)$ erhält man nun höhere Potenzen von $\frac{1}{\lambda_i+a}$ bzw. $R(\lambda_i)$ durch anschließende eventuell mehrfache Differentiation nach λ_i und Multiplikation mit einem Faktor—beides wieder lineare Operationen:

$$(-1)^{k-1}(k-1)!^{-1}\partial_\lambda^{k-1}R(\lambda) = R(\lambda)^k.$$

Daher ist es nötig, sich eine geschlossene Darstellung der Ableitungen von $\Delta^p\varphi$ zu beschaffen, die einem anschließend auch eine handliche Abschätzung erlaubt.

Lemma 2. *Für alle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $p \in \mathbb{N}_0$ und $\vec{l} \in \mathbb{N}_0^{p+1}$ gilt die Darstellung*

$$\begin{aligned}
D^{\vec{l}}(\Delta^p\varphi)(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) = (-1)^p\int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_p\Big(\prod_{i=1}^{p}(1-t_i)^{l_i}t_i^{p-i+\Sigma_{j=i+1}^{p+1}l_j}\Big)\cdot \\
\cdot\,\varphi^{(p+|\vec{l}|)}\Big(\sum_{j=1}^{p}\lambda_j(1-t_j)\prod_{i=1}^{j-1}t_i + \lambda_{p+1}\prod_{i=1}^{p}t_i\Big).
\end{aligned}$$

Dabei ist für $p = 0$ der Ausdruck $\int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_p$ in dieser Formel wegzulassen.

Beweis: Sei zunächst $\vec{l} = 0$. Für $p = 0$ sieht man die Behauptung schnell ein. Für $p = 1$ ergibt sich die rechte Seite für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ zu

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 dt_1\, \varphi'\big(\lambda_1(1-t_1)+\lambda_2 t_1\big) &= -\tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^1 dt_1\,(\lambda_2-\lambda_1)\varphi'\big(\lambda_1+t_1(\lambda_2-\lambda_1)\big)\\
&= -\tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\big[\varphi\big(\lambda_1+t_1(\lambda_2-\lambda_1)\big)\big]_{t_1=0}^{t_1=1}\\
&= -\tfrac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} = \Delta\varphi(\lambda_1,\lambda_2)
\end{aligned}$$

und für $\lambda_1 = \lambda_2$ zu

$$-\int_0^1 dt_1\,\varphi'(\lambda_1) = -\varphi'(\lambda_1) = \Delta\varphi(\lambda_1,\lambda_2).$$

Dann schließt man mit vollständiger Induktion über p, wobei nacheinander Induktionsvoraussetzung und Induktionsannahme eingehen:

$$\begin{aligned}
&(\Delta^{p+1}\varphi)(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+2})\\
&= \big[\Delta_z\big((\Delta^p\varphi)(\lambda_1,\ldots,\lambda_p,z)\big)\big](\lambda_{p+1},\lambda_{p+2})\\
&= \Bigg[\Delta_z(-1)^p\int_0^1 dt_1\cdots\int_0^1 dt_p\,\Big(\prod_{i=1}^p t_i^{p-i}\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot\,\varphi^{(p)}\Big(\sum_{j=1}^p\lambda_j(1-t_j)\prod_{i=1}^{j-1}t_i + z\prod_{i=1}^p t_i\Big)\Bigg](\lambda_{p+1},\lambda_{p+2})\\
&= (-1)^{p+1}\int_0^1 dt_{p+1}\,\partial_z\int_0^1 dt_1\cdots\int_0^1 dt_p\,\Big(\prod_{i=1}^p t_i^{p-i}\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot\,\varphi^{(p)}\Big(\sum_{j=1}^p\lambda_j(1-t_j)\prod_{i=1}^{j-1}t_i + z\prod_{i=1}^p t_i\Big)\Big|_{z=\lambda_{p+1}(1-t_{p+1})+\lambda_{p+2}\,t_{p+1}}\\
&= (-1)^{p+1}\int_0^1 dt_1\cdots\int_0^1 dt_{p+1}\,\Big(\prod_{i=1}^p t_i^{p-i}\Big)\Big(\prod_{i=1}^p t_i\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot\,\varphi^{(p+1)}\Big(\sum_{j=1}^p\lambda_j(1-t_j)\prod_{i=1}^{j-1}t_i + \big(\lambda_{p+1}(1-t_{p+1})+\lambda_{p+2}\,t_{p+1}\big)\prod_{i=1}^p t_i\Big)\\
&= (-1)^{p+1}\int_0^1 dt_1\cdots\int_0^1 dt_{p+1}\Big(\prod_{i=1}^{p+1} t_i^{p+1-i}\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot\,\varphi^{(p+1)}\Big(\sum_{j=1}^{p+1}\lambda_j(1-t_j)\prod_{i=1}^{j-1}t_i + \lambda_{p+2}\prod_{i=1}^{p+1} t_i\Big).
\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Differentiation und Integration ist dadurch gerechtfertigt, daß das Argument der $(p+1)$-ten Ableitung von φ als Konvexkombination von z und den λ_i im Intervall $[\min\{\lambda_1, \dots, \lambda_p, z\}, \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_p, z\}]$ liegt und daher die auftauchenden Funktionswerte von $\varphi^{(p+1)}$ durch eine Konstante majorisiert werden können.

Für $\vec{l} \neq 0$ folgt die Behauptung dann—auf die gleiche Weise gerechtfertigt—durch Differentiation unter dem Integral der bisher bewiesenen Formel. □

Definieren wir uns nun ein lineares Funktional, das nach den bisherigen Überlegungen bei Anwendung auf die Funktionen u_a und $\langle R(\cdot)x, x^*\rangle$ auf die Ausdrücke (2.3) und (2.4) von Satz 2 führt—dies wird für die Funktionen u_a gleich anschließend in Lemma 3 (iii) gezeigt, für die Funktionen $\langle R(\cdot)x, x^*\rangle$ dann analog in Lemma 7. Desweiteren benötigen wir einen Vektorraum, auf dem dieses Funktional bezüglich einer möglichst schwachen Norm stetig ist.

Definition 3. *(i) Sei $(E, |||\cdot|||)$ der normierte Vektorraum aller Funktionen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit*

$$\sup_{\lambda>0} |\lambda^{j+1}\varphi^{(j)}(\lambda)| < \infty \qquad \text{für alle } j = 0, \dots, W,$$

versehen mit der Norm

$$|||\varphi||| := \sum_{j=0}^{W} \|\lambda^{j+1}\varphi^{(j)}(\lambda)\|_\infty, \qquad \varphi \in E,$$

wobei $W := \max_{1\le n\le N} |\vec{k}_n| - 1$.

(ii) Die linearen Funktionale $F_n : (E, |||\cdot|||) \to \mathbb{C}$ $(n = 1, \dots, N)$ seien definiert durch

$$F_n(\varphi) := (-1)^{|\vec{k}_n| - m_n} \prod_{i=1}^{m_n} (k_{n,i} - 1)!^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} D^{\vec{k}_n - 1}(\Delta^{m_n - 1}\varphi)(\vec{\lambda})\, d\mu_n(\vec{\lambda}), \quad \varphi \in E.$$

Das Funktional $F : (E, |||\cdot|||) \to \mathbb{C}$ sei schließlich definiert durch

$$F(\varphi) := \sum_{n=1}^{N} F_n(\varphi), \qquad \varphi \in E.$$

(iii) Die linearen Funktionale $\tilde{F}_n : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ $(n = 1, \dots, N)$ und $\tilde{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ seien definiert durch

$$\tilde{F}_n(\psi) := F_n(\psi|_{\mathbb{R}_+}), \qquad \tilde{F}(\psi) := \sum_{n=1}^{N} \tilde{F}_n(\psi) = F(\psi|_{\mathbb{R}_+}), \qquad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Lemma 3. *(i) Die Funktionale F_n $(n = 1, \dots, N)$ und F sind auf E wohldefiniert und stetig.*

(ii) Für jedes $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $\psi|_{\mathbb{R}_+} \in E$, und die folglich wohldefinierten Funktionale $\tilde{F}_n$ $(n = 1, \dots, N)$ und $\tilde{F}$ sind temperierte Distributionen.

(iii) Für alle $a \geq 0$ ist $u_a \in E$, und für alle $n = 1, \dots, N$ gilt

$$F_n(u_a) = \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \Big(\frac{1}{\lambda_i + a}\Big)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda})$$

und daher unter den Voraussetzungen von Satz 2 $F(u_a) = 0$ für $\forall a \in M$.

Beweis: Man mache sich zunächst klar, daß $|\vec{k}_n - 1| = |\vec{k}_n| - m_n$ ist. Anhand der Darstellung in Lemma 2 zeigt man dann für $\forall n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
&|D^{\vec{k}_n - 1}(\Delta^{m_n - 1}\varphi)(\lambda_1, \dots, \lambda_{m_n})| \\
&\quad = \Big| \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_{m_n - 1} \Big(\prod_{i=1}^{m_n - 1} (1 - t_i)^{k_{n,i} - 1} t_i^{\sum_{j=i+1}^{m_n} k_{n,j} - 1} \Big) \\
&\qquad\qquad \varphi^{(|\vec{k}_n| - 1)} \Big(\sum_{j=1}^{m_n - 1} \lambda_j (1 - t_j) \prod_{i=1}^{j-1} t_i + \lambda_{m_n} \prod_{i=1}^{m_n - 1} t_i \Big) \Big| \\
&\quad \leq \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_{m_n - 1} \Big(\prod_{i=1}^{m_n - 1} (1 - t_i)^{k_{n,i} - 1} t_i^{\sum_{j=i+1}^{m_n} k_{n,j} - 1} \Big) \\
&\qquad\qquad \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{m_n - 1} \lambda_j (1 - t_j) \prod_{i=1}^{j-1} t_i + \lambda_{m_n} \prod_{i=1}^{m_n - 1} t_i \Big)^{-|\vec{k}_n|}}_{=(-1)^{|\vec{k}_n| - 1}(|\vec{k}_n| - 1)!^{-1} u_0^{(|\vec{k}_n| - 1)}(\dots)} \big\| y^{|\vec{k}_n|} \varphi^{(|\vec{k}_n| - 1)}(y) \big\|_\infty \\
&\quad = (-1)^{|\vec{k}_n| - m_n} (|\vec{k}_n| - 1)!^{-1} D^{\vec{k}_n - 1} \underbrace{(\Delta^{m_n - 1} u_0)(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m_n})}_{= \prod_{i=1}^{m_n} u_0(\lambda_i) = \prod_{i=1}^{m_n} \lambda_i^{-1}} \cdot \big\| y^{|\vec{k}_n|} \varphi^{(|\vec{k}_n| - 1)}(y) \big\|_\infty \\
&\quad = (|\vec{k}_n| - 1)!^{-1} \prod_{i=1}^{m_n} (k_{n,i} - 1)! \cdot \vec{\lambda}^{-\vec{k}_n} \big\| y^{|\vec{k}_n|} \varphi^{(|\vec{k}_n| - 1)}(y) \big\|_\infty.
\end{aligned}$$

Wegen $\vec{\lambda}^{-\vec{k}_n} \in L_1(\mathbb{R}_+^{m_n}, |\mu_n|)$ ist daher

$$|F_n(\varphi)| \leq const \cdot \big\| y^{|\vec{k}_n|} \varphi^{(|\vec{k}_n| - 1)}(y) \big\|_\infty \leq const \cdot |||\varphi|||,$$

und die Behauptung (i) ist gezeigt.

(ii) Die erste Aussage ist klar, die zweite ergibt sich direkt aus der Stetigkeit der Funktionale F_n und F in E.

(iii) Klar: $u_a \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ und

$$\sup_{\lambda>0} |\lambda^{j+1}\varphi^{(j)}(\lambda)| = j! \sup_{\lambda>0} \left| \left(\tfrac{\lambda}{\lambda+a}\right)^{j+1} \right| = j! < \infty \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

also ist $u_a \in E$. Nach Lemma 1 (i) ist nun für alle $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} F_n(u_a) &= (-1)^{|\vec{k}_n|-m_n} \prod_{i=1}^{m_n} (k_{n,i}-1)!^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} D^{\vec{k}_n - 1} \prod_{i=1}^{m_n} \tfrac{1}{\lambda_i + a} \, d\mu_n(\vec{\lambda}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \left(\tfrac{1}{\lambda_i+a}\right)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}), \end{aligned}$$

also gilt nach der Voraussetzung in Satz 2 $F(u_a) = \sum_{n=1}^N F_n(u_a) = 0$ für $\forall a \in M$. □

Wir wollen nun eine möglichst große Klasse von Funktionen $\varphi \in E$ mit $F(\varphi) = 0$ finden, zu der auch die Funktion $\varphi(\lambda) = \langle R(\lambda)x, x^*\rangle$ gehört, um dann auf $\langle H_R x, x^*\rangle = 0$ für alle $x^* \in X^*$ und alle $x \in X$ geführt zu werden.

Als erstes zeigen wir, daß alle Funktionen $\psi|_{\mathbb{R}_+}$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, zu dieser Klasse gehören.

Lemma 4. *$\tilde{F}$ ist die Nulldistribution.*

Beweis: Die Funktionale $\tilde{F}_n$ sind als temperierte Distributionen mit Träger in $[0, \infty)$ im distributionellen Sinne Laplace-transformierbar, und ihre Transformierten ergeben sich für alle $s > 0$ nach Definition 3 (ii) und Lemma 2 zu

$$\begin{aligned} &L(\tilde{F}_n)(s) = F_n(e^{-s\cdot}) \\ &= (-1)^{|\vec{k}_n|-m_n} \prod_{i=1}^{m_n} (k_{n,i}-1)!^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) (-1)^{m_n-1} \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_{m_n-1} \cdot \\ &\qquad \cdot \Big(\prod_{i=1}^{m_n-1} (1-t_i)^{k_{n,i}-1} t_i^{\sum_{j=i+1}^{m_n} k_{n,j}-1} \Big) (-s)^{|\vec{k}_n|-1} \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot \exp\Big(-s \Big[\sum_{j=1}^{m_n-1} \lambda_j (1-t_j) \prod_{i=1}^{j-1} t_i + \lambda_{m_n} \prod_{i=1}^{m_n-1} t_i \Big] \Big). \end{aligned}$$

Für die Funktion $L(\tilde{F}_n)$ ist nun $\int_0^\infty e^{-sa} |L(\tilde{F}_n)(s)| ds < \infty$ für $\forall a > 0$, und ihre (klassische) Laplacetransformierte kann mit Hilfe einer Integralvertauschung berechnet werden—beides sieht man leicht ein, wenn man die nachfolgende Rechnung mit $|\mu_n|$ anstelle von μ_n durchführt.

$$\begin{aligned}
&L\big(L(\tilde{F}_n)\big)(a) = \int_0^\infty e^{-sa} L(\tilde{F}_n)(s)\, ds \\
&= \prod_{i=1}^{m_n} (k_{n,i}-1)!^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_{m_n-1} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(\prod_{i=1}^{m_n-1} (1-t_i)^{k_{n,i}-1} t_i^{\sum_{j=i+1}^{m_n} k_{n,j}-1} \Big) \cdot \\
&\qquad \cdot \int_0^\infty ds\, s^{|\vec{k}_n|-1} \exp\Big(-s\Big[\sum_{j=1}^{m_n-1} \lambda_j (1-t_j) \prod_{i=1}^{j-1} t_i + \lambda_{m_n} \prod_{i=1}^{m_n-1} t_i + a \Big]\Big).
\end{aligned}$$

Das ds-Integral läßt sich nun explizit lösen zu

$$(|\vec{k}_n|-1)!\, [\ldots]^{-|\vec{k}_n|} = (-1)^{|\vec{k}_n|-1} u_a^{(|\vec{k}_n|-1)}([\ldots]-a),$$

und so erhält man wieder mit Lemma 2 und Definition 3 (ii)

$$\begin{aligned}
&L\big(L(\tilde{F}_n)\big)(a) \\
&= (-1)^{|\vec{k}_n|-1} \prod_{i=1}^{m_n} (k_{n,i}-1)!^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_{m_n-1} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(\prod_{i=1}^{m_n-1} (1-t_i)^{k_{n,i}-1} t_i^{\sum_{j=i+1}^{m_n} k_{n,j}-1} \Big) \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot u_a^{(|\vec{k}_n|-1)} \Big(\sum_{j=1}^{m_n-1} \lambda_j (1-t_j) \prod_{i=1}^{j-1} t_i + \lambda_{m_n} \prod_{i=1}^{m_n-1} t_i \Big) \\
&= (-1)^{|\vec{k}_n|-m_n} \prod_{i=1}^{m_n} (k_{n,i}-1)!^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) D^{\vec{k}_n-1} (\Delta^{m_n-1} u_a)(\vec{\lambda}) \\
&= F_n(u_a) \;\Big[= \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \prod_{i=1}^{m_n} \big(\tfrac{1}{\lambda_i + a}\big)^{k_{n,i}} \Big].
\end{aligned}$$

(Der Term in den eckigen Klammern ist nur für die Rechtfertigung der Integralvertauschung von Interesse.) Damit ist

$$L\big(L(\tilde{F})\big)(a) = \sum_{n=1}^N L\big(L(\tilde{F}_n)\big)(a) = \sum_{n=1}^N F_n(u_a) = F(u_a) = 0 \qquad \forall a \in M,$$

also $L(\tilde{F}) = 0$, und folglich ist $\tilde{F}$ die Nulldistribution. $\square$

Aus Lemma 4 folgt nun insbesondere, daß für alle Testfunktionen $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$

$$F(\psi) = \tilde{F}(\psi) = 0$$

ist. Wir wollen nun mit Hilfe der Stetigkeit von F weitere Funktionen $\varphi \in E$ aus dem Kern von F bestimmen und bilden dazu den Abschluß von $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ unter der Norm von E.

Lemma 5. $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)}^E$ *ist die Menge aller Funktionen* $\psi \in E$ *mit den Eigenschaften*

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^{j+1}\psi^{(j)}(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{j+1}\psi^{(j)}(\lambda) = 0 \qquad \textit{für } \forall j = 0,\dots,W. \tag{2.6}$$

Beweis: Man sieht leicht ein, daß alle Funktionen $\psi \in \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)}^E$ die Eigenschaften (2.6) haben müssen, denn ist $\psi \in E$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ eine Folge mit $|||\psi - \psi_n||| \to 0$, so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|||\psi - \psi_n||| < \varepsilon$. Sei $\delta > 0$ mit $\psi_n|_{(0,\delta]} \equiv 0$, dann ist für $0 < \lambda \le \delta$

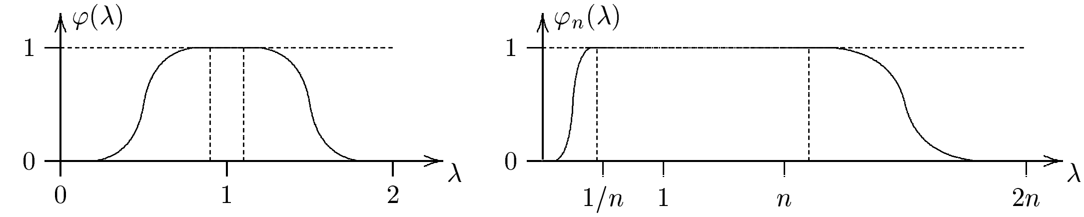
$$|\lambda^{j+1}\psi^{(j)}(\lambda)| = |\lambda^{j+1}(\psi - \psi_n)^{(j)}(\lambda)| \le |||\psi - \psi_n||| < \varepsilon \qquad \forall j = 0,\dots,W,$$

also $\lim_{\lambda\to 0+}|\lambda^{j+1}\psi^{(j)}(\lambda)| = 0$. Für $\lambda \to \infty$ schließt man analog.

Sei nun $\psi \in E$ mit den Eigenschaften (2.6), finde eine Folge $(\psi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ mit $|||\psi - \psi_n||| \to 0$. Sei dazu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ eine Testfunktion mit $0 \le \varphi \le 1$, die in einer Umgebung des Punktes 1 den konstanten Wert 1 annimmt und die auf $[2,\infty)$ verschwindet. Für $\forall n \in \mathbb{N}$ definiere nun $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ durch

$$\varphi_n(\lambda) := \begin{cases} \varphi(n\lambda), & 0 < \lambda < \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \le \lambda \le n, \\ \varphi(\frac{1}{n}\lambda), & n < \lambda. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi_n^{(k)}(\lambda) = \begin{cases} n^k\varphi^{(k)}(n\lambda), & 0 < \lambda < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le \lambda \le n, \\ n^{-k}\varphi^{(k)}(\frac{1}{n}\lambda), & n < \lambda, \\ \Big(0, & 2n < \lambda\Big) \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$. Zur Veranschaulichung eine Beispielskizze der Funktion φ und der Funktionen φ_n:



Schließlich definiere $\psi_n := \psi \cdot \varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Dann ist $\psi_n - \psi = \psi(\varphi_n - 1)$, und es gilt für alle $\lambda > 0$ und alle $j = 0, \ldots, W$ nach der Leibnitz-Regel:

$$
\begin{aligned}
&|\lambda^{j+1}(\psi_n - \psi)^{(j)}(\lambda)| \\
&= \left| \big(\varphi_n(\lambda) - 1\big)\lambda^{j+1}\psi^{(j)}(\lambda) + \sum_{k=1}^{j} \tbinom{j}{k} \lambda^k \cdot \varphi_n^{(k)}(\lambda) \cdot \lambda^{(j-k)+1}\psi^{(j-k)}(\lambda) \right| \\
&\leq \begin{cases}
\|\lambda^{j+1}\psi^{(j)}(\lambda)\|_{(0,\frac{1}{n}]} + \sum\limits_{k=1}^{j} \tbinom{j}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k n^k \|\varphi^{(k)}\|_\infty \|\lambda^{(j-k)+1}\psi^{(j-k)}(\lambda)\|_{(0,\frac{1}{n}]}, \\
0, \\
\|\lambda^{j+1}\psi^{(j)}(\lambda)\|_{(n,\infty)} + \sum\limits_{k=1}^{j} \tbinom{j}{k} (2n)^k n^{-k} \|\varphi^{(k)}\|_\infty \|\lambda^{(j-k)+1}\psi^{(j-k)}(\lambda)\|_{(n,\infty)}, \\
\|\lambda^{j+1}\psi^{(j)}(\lambda)\|_{(2n,\infty)} + 0,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

wobei die vier Zeilen für die vier Fälle $0 < \lambda < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} \leq \lambda \leq n$, $n < \lambda \leq 2n$ und $\lambda > 2n$ stehen.

Aus den Eigenschaften (2.6) folgt, daß alle drei λ-unabhängigen Oberschranken mit $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren für alle $j = 0, \ldots, W$, und folglich gilt $\lim_{n\to\infty} |||\psi_n - \psi||| = 0$. □

Mit Hilfe von Lemma 3 (iii) wollen wir nun noch in einem letzten Schritt die Bedingungen (2.6) als hinreichende Eigenschaft für $F(\psi) = 0$ entscheidend abschwächen.

Lemma 6. *Für alle $\varphi \in E$, für die ein $c \in \mathbb{C}$ existiert mit*

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{j+1}\varphi^{(j)}(\lambda) &= (-1)^j j! \cdot c \qquad \text{und} \qquad (2.7)\\
\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^{j+1}\varphi^{(j)}(\lambda) &= 0 \qquad \forall j = 0, \ldots, W, \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

gilt $F(\varphi) = 0$.

Beweis: Nach Lemma 4 ist $F(\psi) = \tilde{F}(\psi) = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Da F stetig auf $(E, |||\cdot|||)$ ist, ist folglich $F(\psi) = 0$ für alle $\psi \in \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)}^E$, also nach Lemma 5 für alle Funktionen $\psi \in E$ mit den Eigenschaften (2.6).

Ist nun $\varphi \in E$ so, daß nur (2.7) und (2.8) gelten, so erfüllt $\psi \in E$ mit $\psi := \varphi - c\, u_{a_0}$ die Bedingungen (2.6), wobei $a_0 \in M$ beliebig ist, und es ist wegen Lemma 3 (iii)

$$0 = F(\psi) = F(\varphi) - c\, F(u_{a_0}) = F(\varphi). \qquad \square$$

Wenden wir nun das zuletzt Bewiesene auf die Funktion $\langle R(\cdot)x, x^*\rangle$ an, um die gewünschte Aussage zu erhalten, zunächst nur unter zwei zusätzlichen Bedingungen an die Resolventenfamilie R.

Lemma 7. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 2 gelte* $\sup_{\lambda>0}\|R(\lambda)\| < \infty$ *sowie* $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda) = I$. *Dann ist* $H_R = 0$.

Beweis: Seien $x \in X$ und $x^* \in X^*$ beliebig und definiere dann $\varphi \in E$ durch $\varphi(\lambda) := \langle R(\lambda)x, x^*\rangle$ $(\lambda > 0)$. Dann ist $\varphi^{(j)}(\lambda) = (-1)^j j!\,\langle R(\lambda)^{j+1}x, x^*\rangle$ für alle $\lambda > 0$ und $j \in \mathbb{N}_0$ und folglich

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{j+1}\varphi^{(j)}(\lambda) = (-1)^j j! \lim_{\lambda\to\infty} \big\langle \big[\lambda R(\lambda)\big]^{j+1} x, x^*\big\rangle = (-1)^j j!\,\langle x, x^*\rangle \qquad \text{sowie}$$

$$|\lambda^{j+1}\varphi^{(j)}(\lambda)| \le \lambda^{j+1} j!\,\big(\sup_{\mu>0}\|R(\mu)\|\big)^{j+1}\|x\|\,\|x^*\| \to 0 \qquad (\lambda \to 0+),$$

das heißt, die Voraussetzungen von Lemma 6 sind erfüllt, und man erhält mit Hilfe von Lemma 1 (ii)

$$\begin{aligned}
0 &= F(\varphi) = \sum_{n=1}^{N} F_n(\varphi) \\
&= \sum_{n=1}^{N}(-1)^{|\vec{k}_n|-m_n}\prod_{i=1}^{m_n}(k_{n,i}-1)!^{-1}\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} D^{\vec{k}_n-1}\big\langle \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i)\,x, x^*\big\rangle\, d\mu_n(\vec{\lambda}) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}}\big\langle \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i)^{k_{n,i}}\,x, x^*\big\rangle\, d\mu_n(\vec{\lambda}) \\
&= \big\langle \sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}}\prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda})\,x, x^*\big\rangle \\
&= \langle H_R\,x, x^*\rangle.
\end{aligned}$$

Da x^* beliebig war, ist nach Hahn-Banach $H_R\,x = 0$ für alle $x \in X$, also $H_R = 0$. □

Zur allgemeinen Aussage fehlt nun nur noch für beliebige Resolventenfamilien R eine geeignete Approximation R_m $(m \in \mathbb{N})$, die die Forderungen von Lemma 7 erfüllt. Diese soll nun definiert werden. Die Aussagen (iii) und (iv) zeigen, daß die Approximation die Voraussetzungen von Lemma 7 erfüllt; Aussage (v) ist die gewünschte Approximationseigenschaft.

Lemma 8. *Sei* $\{R(\lambda);\ \lambda > 0\}$ *eine* M*-beschränkte Resolventenfamilie. Definiere nun für jedes* $m \in \mathbb{N}$

$$R_m(\lambda) := \tfrac{m}{\lambda m+m^2+1} I + \tfrac{m^4}{(\lambda m+m^2+1)^2} R\big(\tfrac{\lambda m^2+m}{\lambda m+m^2+1}\big) \qquad (\lambda > 0).$$

Dann gilt:

(i) $\forall m \in \mathbb{N}$: $R_m := \{R_m(\lambda);\ \lambda > 0\}$ *ist eine Resolventenfamilie,*
(ii) $\forall m \in \mathbb{N}$: $\sup_{\lambda>0}\|\lambda R_m(\lambda)\| \leq M+1$, *d. h.* R_m *ist* $(M+1)$*-beschränkt,*
(iii) $\forall m \in \mathbb{N}$: $\sup_{\lambda>0}\|R_m(\lambda)\| \leq mM+1$,
(iv) $\forall m \in \mathbb{N}$: $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_m(\lambda) = I$,
(v) $\forall \lambda > 0$: $\lim_{m\to\infty} R_m(\lambda) = R(\lambda)$.

Man beachte, daß die Oberschranke in (ii) *nicht von* m *abhängt.*

Beweis: zu (i): Die Operatoren $R_m(\lambda)$ sind offensichtlich stetig, so daß nur noch die Gültigkeit der Resolventengleichung zu zeigen ist. Seien dazu $m \in \mathbb{N}$ und $\lambda, \mu > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &R_m(\lambda) - R_m(\mu) \\ &= \Big[\tfrac{m}{\lambda m+m^2+1} I + \tfrac{m^4}{(\lambda m+m^2+1)^2} R\big(\tfrac{\lambda m^2+m}{\lambda m+m^2+1}\big)\Big] - \Big[\tfrac{m}{\mu m+m^2+1} I + \tfrac{m^4}{(\mu m+m^2+1)^2} R\big(\tfrac{\mu m^2+m}{\mu m+m^2+1}\big)\Big]. \end{aligned}$$

Die jeweils ersten Terme der eckigen Klammern ergeben sich zusammen zu

$$(\mu-\lambda)\tfrac{m}{\lambda m+m^2+1}\tfrac{m}{\mu m+m^2+1} I, \tag{2.9}$$

die jeweils zweiten Terme zu

$$\begin{aligned} &(\mu-\lambda)\Big[\tfrac{m^4}{(\lambda m+m^2+1)^2}\tfrac{m}{\mu m+m^2+1} R\big(\tfrac{\lambda m^2+m}{\lambda m+m^2+1}\big) + \tfrac{m^4}{(\mu m+m^2+1)^2}\tfrac{m}{\lambda m+m^2+1} R\big(\tfrac{\mu m^2+m}{\mu m+m^2+1}\big)\Big] \\ &+ \tfrac{m^4}{(\lambda m+m^2+1)^2}\big(1 - \tfrac{(\mu-\lambda)m}{\mu m+m^2+1}\big)\cdot R\big(\tfrac{\lambda m^2+m}{\lambda m+m^2+1}\big) - \tfrac{m^4}{(\mu m+m^2+1)^2}\big(1 - \tfrac{(\lambda-\mu)m}{\lambda m+m^2+1}\big)\cdot R\big(\tfrac{\mu m^2+m}{\mu m+m^2+1}\big), \end{aligned} \tag{2.10}$$

wobei die erste Zeile künstlich erzeugt und gleich anschließend wieder abgezogen wurde. Die beiden Vorfaktoren in der zweiten Zeile von (2.10) sind dieselben, und so ergibt sich diese mit Hilfe der Resolventengleichung von R zu

$$\begin{aligned} &\tfrac{m^4}{(\lambda m+m^2+1)(\mu m+m^2+1)}\Big[R\big(\tfrac{\lambda m^2+m}{\lambda m+m^2+1}\big) - R\big(\tfrac{\mu m^2+m}{\mu m+m^2+1}\big)\Big] \\ &\qquad = (\mu-\lambda)\tfrac{m^4}{(\lambda m+m^2+1)^2}\tfrac{m^4}{(\mu m+m^2+1)^2} R\big(\tfrac{\lambda m^2+m}{\lambda m+m^2+1}\big) R\big(\tfrac{\mu m^2+m}{\mu m+m^2+1}\big). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Der Term (2.9), die erste Zeile von (2.10) und der Term (2.11) ergeben schließlich zusammen $(\mu-\lambda)R_m(\lambda)R_m(\mu)$, und folglich ist die Resolventengleichung für R_m erfüllt.

zu (ii) : $\|\lambda R_m(\lambda)\| \leq \frac{\lambda m}{\lambda m+m^2+1} + M\frac{\lambda m^3}{(\lambda m+m^2+1)(\lambda m+1)} \leq 1 + M$.
zu (iii) : $\|R_m(\lambda)\| \leq \frac{m}{\lambda m+m^2+1} + M\frac{m^3}{(\lambda m+m^2+1)(\lambda m+1)} \leq 1 + Mm$.
zu (iv) und (v) : Direkt aus der Definition mit Hilfe der Stetigkeit von $R(\cdot)$. □

Beweis von Satz 2:

Sei R eine M-beschränkte Resolventenfamilie. Dann erfüllt für jedes $m \in \mathbb{N}$ R_m nach Lemma 8 (iii) und (iv) die Voraussetzungen von Lemma 7, und es gilt $H_{R_m} = 0$.

Führt man nun in dieser Gleichung den Grenzübergang $m \to \infty$ aus, wobei nach Lemma 8 (ii) wegen

$$\begin{aligned} \Big\| \prod_{i=1}^{m_n} R_m(\lambda_i)^{k_{n,i}} \Big\| &\leq \prod_{i=1}^{m_n} \lambda_i^{-k_{n,i}} \underbrace{\|\lambda_i R_m(\lambda_i)\|}_{\leq M+1}{}^{k_{n,i}} \\ &\leq (M+1)^{|\vec{k}_n|} \, \vec{\lambda}^{-\vec{k}_n} \in L_1(\mathbb{R}_+^{m_n}, |\mu_n|) \end{aligned}$$

für alle $n = 1, \ldots, N$ nach Lebesgue der Grenzwert unter dem Integral ausgeführt werden darf, so folgt mit Lemma 8 (v): $H_R = 0$. $\square$

2.4 Einige Bemerkungen

Lemma 4 kann auch als Eindeutigkeitssatz einer verallgemeinerten Form der Stieltjes-Transformation für Distributionen der Form

$$\sum_{n=0}^{N} D^n \mu_n \tag{2.12}$$

(mit Maßen μ_n auf $\mathbb{R}_+$ mit der Eigenschaft $\int_0^\infty \lambda^{-(n+1)} d|\mu_n|(\lambda) < \infty$) sowie deren Faltungen miteinander interpretiert werden. Die Stieltjes-Faltung von bestimmten Distributionen wurde bereits zum Beispiel in [11] untersucht, dort allerdings nur mit einem weit schwieriger zu handhabenden Eindeutigkeitssatz.

Die gerade beschriebene Distributionenklasse zeigt, wie nahe der hier vorgestellte Funktionalkalkül mit demjenigen von L. Schwartz für Erzeuger einer gleichmäßig beschränkten Halbgruppe verwandt ist, in dem Distributionen $F \in \mathcal{D}_{L^1}([0,\infty))$ betrachtet werden, die bekanntlich ebenfalls durch die Darstellung (2.12) charakterisiert sind, bloß mit Maßen μ_n auf $[0,\infty)$ mit $\int_0^\infty d|\mu_n| < \infty$. Daß dieser Kalkül im Gegensatz zu dem hier vorgestellten auch nicht-stetige Operatoren erfaßt, liegt wohl letztlich daran, daß $\partial_\lambda^n e^{\lambda A} = A^n e^{\lambda A}$ i. a. nicht stetig ist, wohl aber $\partial_\lambda^n R(\lambda; A) = (-1)^n n!\, R(\lambda; A)^{n+1}$. Die folgenden rein formalen Rechnungen mögen den Leser vielleicht überzeugen:

$$\begin{aligned} \left\langle D^n \mu_n, e^{\cdot A} \right\rangle &= \int_0^\infty d\mu_n(\lambda)(-\partial_\lambda)^n e^{\lambda A} = \int_0^\infty d\mu_n(\lambda)(-A)^n e^{\lambda A}, \\ \left\langle D^n \mu_n, R(\cdot\,; A) \right\rangle &= \int_0^\infty d\mu_n(\lambda)(-\partial_\lambda)^n R(\lambda; A) = n! \int_0^\infty d\mu_n(\lambda) R(\lambda; A)^{n+1}. \end{aligned}$$

Die jeweils ersten Ausdrücke mögen dabei symbolisch für die vom Schwartzschen bzw. für die vom hier vorgestellten Kalkül zugeordneten Operatoren stehen. Sie sind ebensowenig mathematisch korrekt wie die darauffolgenden Ausdrücke der ersten Zeile und folglich nur mit äußerster Vorsicht zu genießen, sie sind jedoch allesamt durch Anschauung und durch einige konkrete Beispiele gerechtfertigt.

Zu detaillierteren Ausführungen über den Kalkül von L. Schwartz, insbesondere in Bezug auf gebrochene Potenzen, siehe auch [8].

Die Charakterisierung obiger Distributionenklasse als topologischer Dualer eines lokalkonvexen Raumes wäre ein geeigneter Einstieg für weitere Untersuchungen auf diesem Gebiet.

Kapitel 3

Gebrochene Potenzen von Operatoren

3.1 Einleitung

Hier und in den folgenden Kapiteln wird vorausgesetzt, daß $A \in \mathcal{K}_0$ ist, so bezeichnen wir die Menge aller Operatoren der Klasse $\mathcal{K}$, die dicht definiert sind. Aus dieser zusätzlichen Eigenschaft erhält man nämlich die Grenzwerteigenschaft $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x$ für $\forall x \in X$, die für $x \in D(A)$ aus $\lambda R(\lambda; A)x - x = R(\lambda; A)Ax$ und für alle übrigen $x \in X = \overline{D(A)}$ dann mit dem Satz von Banach-Steinhaus folgt.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, mit Hilfe des in Kapitel 2 entwickelten Funktionalkalküls zu zeigen, daß man ausgehend von der Definition gebrochener Potenzen

$$(-A)^\alpha x := \operatorname*{s\text{-}lim}_{N\to\infty} C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m x \, d\lambda,$$

wobei $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$ und $C_{\alpha,m} := \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\frac{1}{1+\lambda})^m d\lambda$ ist, alle gewünschten Eigenschaften dieser Operatoren zeigen kann: Abgeschlossenheit, Interpolation ganzzahliger Potenzen und die beiden Potenzgesetze $(-A)^\alpha(-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$ und $((-A)^\alpha)^\beta = (-A)^{\alpha\beta}$ $(0 < \alpha \leq 1,\ \beta > 0)$.

Anders als in [3] müssen wir uns hier nicht mehr auf den Fall $0 < \alpha < 1$ beschränken, sondern behandeln alle $\alpha > 0$.

3.2 Definition der Operatoren $T_{\alpha,m,N}$

Die Grundlage dieses Kapitels ist es, für gegebenes $A \in \mathcal{K}_0$ die Existenz von Operatoren $T_{\alpha,m,N} \in L(X)$ $(0 < \alpha < m \in \mathbb{N},\ N > 0)$ nachzuweisen mit den Eigenschaften $\operatorname{s-lim}_{N\to\infty} T_{\alpha,m,N}x = C_{\alpha,m} \cdot x$ und

$$(-A)^\alpha \, T_{\alpha,m,N} \, x = \int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m d\lambda \, x \tag{3.1}$$

für alle $x \in X$. Da sich die erste Eigenschaft im Falle der Multiplikationsoperatoren direkt aus der zweiten ergibt, bleibt zu hoffen, daß dies auch im allgemeinen Fall so ist und anhand einer expliziten Darstellung der Operatoren $T_{\alpha,m,N}$ relativ einfach gezeigt werden kann. Diese Vermutung wird sich bestätigen.

Einzige Vorgabe ist also die Erfüllung von Gleichung (3.1), die wie in der Einleitung beschrieben mit der dort angegebenen Gleichung (5) gezeigt werden kann. Diese widerum ist eine Operatorgleichung mit stetigen Operatoren auf beiden Gleichungsseiten und soll mit Hilfe des extra für dieses Problem entwickelten Funktionalkalküls aus Kapitel 2 bewiesen werden. Das ist natürlich nur dann möglich, wenn es gelingt, den Ausdruck, der dem Operator $T_{\alpha,m,N}$ durch die Multiplikationsoperatoren zugeordnet wird, das ist nach Gleichung (3.1)

$$s^{-\alpha} \int_0^N \lambda^{\alpha-1} \left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^m d\lambda \qquad (s > 0),$$

auf eine Form zu bringen, die vom Funktionalkalkül erfaßt wird.

Diese Umformungen und die anschließende Ausführung der eben beschriebenen Beweisschritte sind der Inhalt dieses Abschnittes .

Sei also $\alpha > 0$ fest. In diesem gesamten Kapitel wählen wir dazu passend ein $n(\alpha)$ so, daß $n(\alpha) \leq \alpha < n(\alpha) + 1$ ist; wir schreiben jedoch nur kurz n statt $n(\alpha)$, solange klar ist, auf welchen Wert α sich n bezieht.

Beschränken wir uns zuerst auf den weit schwierigeren Fall $\alpha \notin \mathbb{N}$ sowie auf $N = 1$ und beginnen wir mit einigen einfachen Umformungen (Substitutionen $\lambda \to s\lambda$ und $\lambda \to \lambda^{-1}$), um den Faktor s^α vom Integral abzuspalten. Es gilt für alle $s > 0$:

$$\begin{aligned} s^{-\alpha} \int_0^1 \lambda^{\alpha-1} \left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^m d\lambda &= \int_0^{s^{-1}} \lambda^{\alpha-1} \left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)^m d\lambda \\ &= \int_s^\infty \lambda^{-\alpha-1} \left(1 - \tfrac{1}{1+\lambda}\right)^m d\lambda \\ &= \int_s^\infty \lambda^{m-(n+1)} \hat{g}(\lambda)\, d\lambda, \end{aligned} \tag{3.2}$$

falls $\hat{g}(\lambda) = \lambda^{n-\alpha} \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^m$. Definiere also

$$\begin{aligned} g(t) &:= I_x^{\alpha-n} \left(\tfrac{x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-x}\right)(t) \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha-n)(m-1)!} \int_0^t (t-x)^{\alpha-n-1} x^{m-1} e^{-x} dx \\ &= \tfrac{t^{\alpha+m-n-1}}{\Gamma(\alpha-n)(m-1)!} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-n-1} x^{m-1} e^{-tx} dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Stellen wir nun ein kleines Hilfsmittel bereit, mit dem wir den Term (3.2) weiter umformen können.

Lemma 9. *Sei* $p \in \mathbb{N}_0$ *und* $g \in C^p(\mathbb{R}_+)$ *derart, daß für alle* $i = 0, \ldots, p$ *und alle* $s > 0$ *gilt:*

(i) $e^{-st}\, t^{i-p-1} g(t) \quad \in L(0,\infty)$,

(ii) $e^{-st}\, \partial_t^i\, t^{i-p-1} g(t) \in L(0,\infty)$,

(iii) $\forall j = 0, \ldots, i-1 : \lim\limits_{t \to 0+} e^{-st}\, \partial_t^j\, t^{i-p-1} g(t) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-st}\, \partial_t^j\, t^{i-p-1} g(t) = 0.$

Dann ist g *Laplace-transformierbar, und für* $\forall s > 0$ *gilt*

$$\int_s^\infty \lambda^p \hat{g}(\lambda)\, d\lambda = L\Big(\sum_{i=0}^p \frac{p!}{i!}\, \partial_t^i\, t^{i-p-1} g(t) \Big)(s).$$

Beweis: Aus (i) folgt schnell, daß g Laplace-transformierbar ist, und Tonelli und mehrfach angewandte partielle Integration ergeben

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty \lambda^p \hat{g}(\lambda)\, d\lambda &= \int_s^\infty d\lambda\, \lambda^p \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t} g(t) = \int_0^\infty dt\, g(t) \int_s^\infty d\lambda\, \lambda^p e^{-\lambda t} \\
&= \int_0^\infty dt\, g(t)\, t^{-p-1} \int_{st}^\infty d\lambda\, \lambda^p e^{-\lambda} \\
&= \int_0^\infty dt\, g(t)\, t^{-p-1} \Big[-e^{-\lambda} \sum_{i=0}^p \frac{p!}{i!} \lambda^i \Big]_{\lambda = st}^\infty \\
&= \sum_{i=0}^p \frac{p!}{i!} \int_0^\infty dt\, g(t)\, t^{-p-1} e^{-st} (st)^i \\
&= \sum_{i=0}^p \frac{p!}{i!} \int_0^\infty dt\, t^{i-p-1} g(t) (-\partial_t)^i e^{-st} \\
&= \sum_{i=0}^p \frac{p!}{i!} \int_0^\infty dt\, e^{-st}\, \partial_t^i\, t^{i-p-1} g(t).
\end{aligned}$$

□

Lemma 10. *Die in* (3.3) *definierte Funktion* g *erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 9 mit* $p = m - (n+1)$.

Beweis: Offenbar ist $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, und man rechnet für alle $j = 0, \ldots, i$ nach:

$$\begin{aligned}
& e^{-st}\, \partial_t^j\, t^{i-p-1} g(t) = e^{-st}\, \partial_t^j \tfrac{t^{\alpha+i-1}}{\Gamma(\alpha-n)(m-1)!} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-n-1} x^{m-1} e^{-tx} dx \\
&= \tfrac{e^{-st}}{\Gamma(\alpha-n)(m-1)!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \tfrac{\Gamma(\alpha+i)(-1)^{j-k}}{\Gamma(\alpha+i-k)} t^{\alpha+i-1-k} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-n-1} x^{m-1+j-k} e^{-tx} dx.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Da das letzte Integral gleichmäßig bezüglich t abgeschätzt werden kann, sind alle drei Forderungen von Lemma 9 erfüllt. □

Benutzen wir Lemma 9 und Darstellung (3.4) für $j = i$, die Umordnung der Summationsreihenfolge $\sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{i} c_{i,k} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=k}^{p} c_{i,k} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{p-k} c_{i+k,k} = \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{p-i} c_{i+k,k}$ sowie die Abkürzung

$$d_{\alpha,m,i} := \tfrac{(n+i)!\,(m-n-1)!}{\Gamma(\alpha-n)(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-n-1-i} \tbinom{i+k}{k} \tfrac{\Gamma(\alpha+i+k)(-1)^i}{(i+k)!\,\Gamma(\alpha+i)},$$

so erhalten wir schließlich aus Gleichung (3.2):

$$\begin{aligned}
&s^{-\alpha}\int_0^1 \lambda^{\alpha-1}\big(1-\tfrac{\lambda}{\lambda+s}\big)^m d\lambda \\
&= L\Big(\sum_{i=0}^{m-n-1} \tfrac{(m-n-1)!}{i!\,\Gamma(\alpha-n)(m-1)!} \sum_{k=0}^{i} \tbinom{i}{k} \tfrac{\Gamma(\alpha+i)(-1)^{i-k}}{\Gamma(\alpha+i-k)} t^{\alpha+i-1-k}\cdot \\
&\qquad\qquad \int_0^1 (1-x)^{\alpha-n-1} x^{m-1+i-k} e^{-tx} dx\Big)(s) \\
&= L\Big(\sum_{i=0}^{m-n-1} \tfrac{(m-n-1)!}{\Gamma(\alpha-n)(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-n-1-i} \tbinom{i+k}{k} \tfrac{\Gamma(\alpha+i+k)(-1)^{i}}{(i+k)!\,\Gamma(\alpha+i)} t^{\alpha+i-1}\cdot \\
&\qquad\qquad \int_0^1 (1-x)^{\alpha-n-1} x^{m-1+i} e^{-tx} dx\Big)(s) \\
&= L\Big(\sum_{i=0}^{m-n-1} \frac{d_{\alpha,m,i}}{(n+i)!}\, t^{\alpha+i-1} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-n-1} x^{m-1+i} e^{-tx} dx\Big)(s) \\
&= L\Big(\sum_{i=0}^{m-n-1} \frac{t^{n+i}}{(n+i)!} \cdot t^{\alpha-(n+1)} \widehat{h}_{\alpha,m,i}(t)\Big)(s) \\
&= \sum_{i=n+1}^{m} L\Big(\frac{t^{i-1}}{(i-1)!} L\big(I^{n+1-\alpha} h_{\alpha,m,i-n-1}\big)(t)\Big)(s).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Dabei haben wir $h_{\alpha,m,i}$ für alle $i = 0, \ldots, m-n-1$ definiert durch

$$h_{\alpha,m,i}(x) := d_{\alpha,m,i}\,(1-x)^{\alpha-n-1} x^{m-1+i}\, 1_{(0,1)}(x).$$

Legen wir uns nun ein weiteres Hilfsmittel zurecht und verallgemeinern wir die bekannte Tatsache, daß zweimaliges Anwenden der Laplacetransformation der Stieltjestransformation entspricht.

Lemma 11. *Für jedes $i \in \mathbb{N}$ und jede meßbare Funktion f mit $\int_0^\infty |f(\lambda)|\lambda^{-i} d\lambda < \infty$ sind f und $t \mapsto \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\widehat{f}(t)$ Laplace-transformierbar, und es gilt*

$$L\big(\tfrac{t^{i-1}}{(i-1)!}\widehat{f}(t)\big)(s) = \int_0^\infty f(\lambda)\frac{1}{(\lambda+s)^i}\, d\lambda \qquad \forall s \geq 0.$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} L\big(t^{i-1}\widehat{f}(t)\big)(s) &= \int_0^\infty dt\, e^{-st} t^{i-1} \widehat{f}(t) = \int_0^\infty dt\, e^{-st} t^{i-1} \int_0^\infty d\lambda\, e^{-\lambda t} f(\lambda) \\ &= \int_0^\infty d\lambda\, f(\lambda) \int_0^\infty dt\, e^{-(s+\lambda)t} t^{i-1} = \int_0^\infty d\lambda\, f(\lambda) \tfrac{1}{(s+\lambda)^i} \cdot (i-1)! \end{aligned}$$

□

Proposition 1. *Für alle $i = n+1, \dots, m$ erfüllt die Funktion*

$$\begin{aligned} f_{\alpha,m,i}(\lambda) &:= \big(I^{n+1-\alpha} h_{\alpha,m,i-n-1}\big)(\lambda) \\ &= \tfrac{d_{\alpha,m,i-n-1}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_0^{\min\{\lambda,1\}} (\lambda - x)^{n-\alpha} (1-x)^{\alpha-n-1} x^{m+i-n-2} dx \qquad (\lambda > 0) \end{aligned}$$

die Abschätzung $\int_0^\infty |f_{\alpha,m,i}(\lambda)| \lambda^{-i} d\lambda < \infty$.

BEWEIS: Für alle $\lambda > 1$ kann man das Integral abschätzen durch

$$(\lambda - 1)^{n-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-n-1} x^{m+i-n-2} dx$$

und für $0 < \lambda < 1$ durch

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)^{\alpha-n-1} \int_0^\lambda (\lambda - x)^{n-\alpha} x^{m+i-n-2} dx \\ = \;& (1-\lambda)^{\alpha-n-1} \lambda^{m+i-\alpha-1} \int_0^1 (1-x)^{n-\alpha} x^{m+i-n-2} dx. \end{aligned}$$

□

Wegen dieser auch später noch fundamental wichtigen Aussage können wir Lemma 11 anwenden und sind am Ziel unserer Rechnungen. Die gesuchte skalare Gleichung, auch für den Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ wollen wir in der folgenden Proposition festhalten.

Proposition 2. *Seien $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \le \alpha < n+1$, definiere für $i = n, \dots, m-1$ $\quad c_{n,m,i} := \frac{(-1)^{i+n}}{i} \binom{m-n-1}{i-n}$.*

Dann gilt für alle $N > 0$ im Falle $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\int_0^N \lambda^{\alpha-1} \big(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\big)^m d\lambda \;=\; s^\alpha \cdot \sum_{i=n+1}^m \int_0^\infty f_{\alpha,m,i}(\lambda) \big(\tfrac{N}{N\lambda+s}\big)^i d\lambda, \tag{3.6}$$

und im Falle $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\int_0^N \lambda^{\alpha-1} \big(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\big)^m d\lambda \;=\; s^\alpha \cdot \sum_{i=\alpha}^{m-1} c_{\alpha,m,i} \big(\tfrac{N}{N+s}\big)^i. \tag{3.7}$$

Beweis: Den Fall $\alpha \notin \mathbb{N}$ erhalten wir für $N = 1$ aus (3.5), Lemma 11 und Proposition 1, für beliebige N ersetzen wir dann s durch $\frac{s}{N}$ und substituieren anschließend auf den linken Gleichungsseiten $\lambda \to \frac{\lambda}{N}$.

Den Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ erhält man direkt aus

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda s^\alpha \sum_{i=\alpha}^{m-1} c_{\alpha,m,i} \left(\tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^i &= s^\alpha \sum_{i=\alpha}^{m-1} c_{\alpha,m,i}\; i \left(\tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{i-1} \tfrac{s}{(\lambda+s)^2} \\
&= \lambda^{\alpha-1} \left(\tfrac{s}{\lambda+s}\right)^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{m-\alpha-1} c_{\alpha,m,i+\alpha}(i+\alpha) \left(\tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^i \\
&= \lambda^{\alpha-1} \left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{m-\alpha-1} \tbinom{m-\alpha-1}{i} \left(-\tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^i \\
&= \lambda^{\alpha-1} \left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^m .
\end{aligned}$$

□

Übersetzen wir nun die gefundenen Ausdrücke (3.6) und (3.7) in die vom Funktionalkalkül nahegelegten Operatoren und halten die am Abschnittsanfang als Ziel vorgegebene Grenzwerteigenschaft fest.

Definition 4. *Es seien $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$ und $N > 0$. Dann sei der Operator $T_{\alpha,m,N} \in L(X)$ im Falle $\alpha \notin \mathbb{N}$ definiert durch*

$$T_{\alpha,m,N} := \sum_{i=n+1}^{m} \int_0^\infty f_{\alpha,m,i}(\lambda) [NR(N\lambda; A)]^i d\lambda \tag{3.8}$$

und im Falle $\alpha \in \mathbb{N}$ durch

$$T_{\alpha,m,N} := \sum_{i=\alpha}^{m-1} c_{\alpha,m,i}\, [NR(N; A)]^i. \tag{3.9}$$

Proposition 3. *Für $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$ gilt*

$$\operatorname*{s-lim}_{N\to\infty} T_{\alpha,m,N} x = C_{\alpha,m} \cdot x. \tag{3.10}$$

Beweis: Sei zunächst $\alpha \notin \mathbb{N}$. Anhand der Darstellung

$$T_{\alpha,m,N} x = \sum_{i=n+1}^{m} \int_0^\infty f_{\alpha,m,i}(\lambda) \lambda^{-i} [N\lambda R(N\lambda; A)]^i x \, d\lambda.$$

sieht man, daß man mit Lebesgue und Proposition 1 den Grenzübergang unter dem Integral ausführen darf und als Grenzwert

$$\sum_{i=n+1}^{m} \int_0^\infty f_{\alpha,m,i}(\lambda) \lambda^{-i} d\lambda \cdot x$$

erhält. Der Vorfaktor ergibt sich wieder mit Lebesgue aus Gleichung (3.6) mit $N = 1$ zu

$$\lim_{s\to 0+} s^{-\alpha} \int_0^1 \lambda^{\alpha-1}\left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^m d\lambda = \lim_{s\to 0+} \int_0^{s^{-1}} \lambda^{\alpha-1}\left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)^m d\lambda = C_{\alpha,m}.$$

Im Falle $\alpha \in \mathbb{N}$ argumentiert man genauso. □

Jetzt kommt unser Funktionalkalkül zum ersten Mal zum Zuge: Wir beweisen, wie bereits in der Einleitung angekündigt, als Vorstufe zu Gleichung (3.1) die Gleichung (3.11).

Proposition 4. *Seien $0 < \alpha < m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ und $M, N > 0$. Dann gilt für alle $x \in X$ die Gleichung*

$$\begin{aligned}&\int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^{m_1} d\lambda\ T_{\alpha,m_2,M}\, x \\ = &\int_0^M \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^{m_2} d\lambda\ T_{\alpha,m_1,N}\, x.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Beweis: Wir führen nur den Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ ausführlich vor, um gleichzeitig die Flexibilität des in Kapitel 2 entwickelten Funktionalkalküls bezüglich der verwendbaren Maße zu demonstrieren.

Gleichung (3.7) liefert uns die Beziehung

$$\begin{aligned}&\int_0^N \lambda^{\alpha-1}\left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{m_1} d\lambda \cdot \sum_{i=\alpha}^{m_2-1} c_{\alpha,m_2,i}\left(\tfrac{M}{M+s}\right)^i \\ &\qquad = \int_0^M \lambda^{\alpha-1}\left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{m_2} d\lambda \cdot \sum_{i=\alpha}^{m_1-1} c_{\alpha,m_1,i}\left(\tfrac{N}{N+s}\right)^i.\end{aligned}$$

Um den Funktionalkalkül anwenden zu können, bringen wir sie auf die Form

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m_1} \binom{m_1}{k}(-1)^k \int_0^N \lambda^{\alpha-1+k}\left(\tfrac{1}{\lambda+s}\right)^k d\lambda \cdot \sum_{i=\alpha}^{m_2-1} c_{\alpha,m_2,i}\, M^i \int_0^\infty d\delta_M(\lambda)\left(\tfrac{1}{\lambda+s}\right)^i \\ &\quad = \sum_{k=0}^{m_2} \binom{m_2}{k}(-1)^k \int_0^M \lambda^{\alpha-1+k}\left(\tfrac{1}{\lambda+s}\right)^k d\lambda \cdot \sum_{i=\alpha}^{m_1-1} c_{\alpha,m_1,i}\, N^i \int_0^\infty d\delta_N(\lambda)\left(\tfrac{1}{\lambda+s}\right)^i.\end{aligned}$$

Da wir die Ausdrücke $\lambda^{\alpha-1+k}$ als Dichte eines auf $[0, N]$ bzw. $[0, M]$ konzentrierten Maßes auffassen und die $(k = 0)$-Terme der Konstanten c des Funktionalkalküls zuordnen können, besagt nun Satz 1

$$\sum_{k=0}^{m_1} \binom{m_1}{k}(-1)^k \int_0^N \lambda^{\alpha-1+k} R(\lambda;A)^k d\lambda \sum_{i=\alpha}^{m_2-1} c_{\alpha,m_2,i}\, M^i \int_0^\infty d\delta_M(\lambda) R(\lambda;A)^i$$
$$= \sum_{k=0}^{m_2} \binom{m_2}{k}(-1)^k \int_0^M \lambda^{\alpha-1+k} R(\lambda;A)^k d\lambda \sum_{i=\alpha}^{m_1-1} c_{\alpha,m_1,i}\, N^i \int_0^\infty d\delta_N(\lambda) R(\lambda;A)^i,$$

und nach Umkehrung des ersten Rechenschrittes erhält man die zu zeigende Gleichung

$$\int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^{m_1} d\lambda \sum_{i=\alpha}^{m_2-1} c_{\alpha,m_2,i}\,[MR(M;A)]^i$$
$$= \int_0^M \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^{m_2} d\lambda \sum_{i=\alpha}^{m_1-1} c_{\alpha,m_1,i}\,[NR(N;A)]^i.$$

Den Fall $\alpha \notin \mathbb{N}$ behandelt man analog (mit einer Substitution $\lambda \to \frac{\lambda}{N}$ auf der rechten Seite von Gleichung (3.6)), wobei hier entscheidend Proposition 1 als Nachweis für die Anwendbarkeit des Funktionalkalküls eingeht. □

3.3 Definition gebrochener Potenzen

Nun ist alles für den Beweis von Gleichung (3.1) und den damit verbundenen Beweis der Wohldefiniertheit der nachfolgend definierten Operatoren $(-A)^\alpha$ vorbereitet.

Definition 5. *Sei $A \in \mathcal{K}_0$ und $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$. Definiere den Operator $(-A)^\alpha : D((-A)^\alpha) \subset X \to X$ durch*

$$(-A)^\alpha x := \operatorname*{s-lim}_{N\to\infty} C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^m x\, d\lambda \tag{3.12}$$

für alle $x \in D((-A)^\alpha)$, wobei $D((-A)^\alpha)$ die Menge aller $x \in X$ sei, für die der Grenzwert (3.12) *existiert.*

Die Konstanten $C_{\alpha,m}$ seien dabei definiert durch $C_{\alpha,m} := \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\frac{1}{1+\lambda})^m d\lambda$ $= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m)}$.

Daß Definitionsbereich und Funktionswerte von $(-A)^\alpha$ nicht von der Wahl von m abhängen, wird sich erst im Anschluß an Satz 3 zeigen. Bezeichnet man den der natürlichen Zahl $m > \alpha$ zugeordneten Operator vorübergehend mit $(-A)^\alpha_m$, so ist in der folgenden Aussage der Operator $(-A)^\alpha$ im Moment noch als einer der Operatoren $(-A)^\alpha_{m'}$ zu lesen, wobei $m' \in \mathbb{N}$ mit $m' > \alpha$ beliebig gewählt werden darf.

Satz 3. *Für* $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$, $N > 0$ *und alle* $x \in X$ *ist* $T_{\alpha,m,N}\, x \in D((-A)^\alpha)$, *und es gilt*

$$(-A)^\alpha\, T_{\alpha,m,N}\, x = \int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m x \, d\lambda. \tag{3.13}$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus den Propositionen 3 und 4 mit $M \to \infty$. □

Korollar 1. *Die Operatoren* $(-A)^\alpha$ $(\alpha > 0)$ *sind dicht definiert.*

Beweis: Nach Proposition 3 gilt für jedes $x \in X$ und ein beliebiges $m > \alpha$ $\text{s-lim}_{N\to\infty} C_{\alpha,m}^{-1}\, T_{\alpha,m,N}\, x = x$. □

Proposition 5. *Der Operator* $(-A)^\alpha$ *aus Definition 5 hängt nicht von der Wahl von* m *ab.*

Beweis: Es seien $0 < \alpha < m, m' \in \mathbb{N}$ und $x \in D((-A)^\alpha_{m'})$. Dann kann man in Gleichung (3.13) mit $(-A)^\alpha_{m'}$ anstelle von $(-A)^\alpha$ die beiden Operatoren auf der linken Gleichungsseite vertauschen und erhält mit Proposition 3, daß $x \in D((-A)^\alpha_m)$ ist mit $(-A)^\alpha_m x = (-A)^\alpha_{m'} x$. □

Bemerkung: Satz 3 besagt zusammen mit Proposition 3, daß für alle Werte $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\big[\{T_{\alpha,m,N}\, x;\ x \in X,\ N > 0\}\big]$$

ein „core" von $D((-A)^\alpha)$ ist, d. h. ein linearer Teilraum, der dicht in $D((-A)^\alpha)$ bezüglich der Graphennorm von $(-A)^\alpha$ liegt:

$$\begin{aligned}
&\|C_{\alpha,m}^{-1}\, T_{\alpha,m,N}\, x - x\|_{D((-A)^\alpha)} \\
&\quad = \|C_{\alpha,m}^{-1}\, T_{\alpha,m,N}\, x - x\| + \|(-A)^\alpha\, C_{\alpha,m}^{-1}\, T_{\alpha,m,N}\, x - (-A)^\alpha x\| \\
&\quad = \|C_{\alpha,m}^{-1}\, T_{\alpha,m,N}\, x - x\| + \Big\|C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m x\, d\lambda - (-A)^\alpha x\Big\| \\
&\quad \to 0
\end{aligned}$$

mit $N \to \infty$ für alle $x \in D((-A)^\alpha)$.

3.4 Abgeschlossenheit, Interpolation ganzzahliger Potenzen

Wir werden nun zwei weitere wesentliche Eigenschaften unserer Definition zeigen: Erstens ist mit A auch jede gebrochene Potenz $(-A)^\alpha$ abgeschlossen, und zweitens interpoliert unsere Definition die ganzzahligen Potenzen von $(-A)$, das heißt, für $\alpha \in \mathbb{N}$ ergibt unsere Definition auch tatsächlich wieder die α-fache Hintereinanderausführung von $(-A)$.

Proposition 6. *Der Operator $(-A)^\alpha$ ist für alle $\alpha > 0$ abgeschlossen.*

Beweis: Sei $(x_k)_k$ eine Folge aus $D((-A)^\alpha)$ mit $x_k \to x \in X$ und $(-A)^\alpha x_k \to y \in X$. Setzt man in Gleichung (3.13) x_k ein und führt dann den Grenzübergang $k \to \infty$ aus, so erhält man

$$T_{\alpha,m,N}\, y = \int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m x \, d\lambda,$$

und folglich ist nach Proposition 3 $x \in D((-A)^\alpha)$ mit $(-A)^\alpha x = y$. □

Proposition 7. *Der von uns definierte Operator $(-A)^\alpha$ interpoliert die ganzzahligen Potenzen von $(-A)$.*

Beweis: Wir wählen zu gegebenem $\alpha \in \mathbb{N}$ das kleinstmögliche m, also $m = \alpha+1$, und erhalten so aus Gleichung (3.7)

$$\int_0^N \lambda^{\alpha-1}\left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^m d\lambda = s^\alpha \tfrac{1}{\alpha}\left(\tfrac{N}{N+s}\right)^\alpha = \tfrac{N^\alpha}{\alpha}\left(1 - \tfrac{N}{N+s}\right)^\alpha.$$

Wenden wir darauf nach Ausmultiplizieren der Klammerterme den Funktionalkalkül an und bedenken, daß $C_{\alpha,\alpha+1} = \frac{1}{\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{N}$ ist, dann erhalten wir

$$C_{\alpha,m}^{-1}\int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m x \, d\lambda = N^\alpha[I - NR(N; A)]^\alpha x = (-A)^\alpha [NR(N; A)]^\alpha x.$$

Ist nun $x \in D((-A)^\alpha_m)$, konvergiert also das Integral mit $N \to \infty$, dann folgt aus der Abgeschlossenheit von $(-A)^\alpha$, daß $x \in D((-A)^\alpha)$ ist und die linke Seite gegen $(-A)^\alpha x$ konvergiert, d. h. $(-A)^\alpha_m x = (-A)^\alpha x$.

Ist umgekehrt $x \in D((-A)^\alpha)$, so kann man die Operatoren auf der rechten Gleichungsseite vertauschen und sieht, daß die linke Seite gegen $(-A)^\alpha x$ konvergiert, daß also $x \in D((-A)^\alpha_m)$ ist mit $(-A)^\alpha_m x = (-A)^\alpha x$.

Die für den ersten Teil benötigte Abgeschlossenheit der α-fachen Hintereinanderausführung von $(-A)$ beweist man dabei wie folgt: Gilt $D(A^\alpha) \ni x_k \to x \in X$, $(-A)^\alpha x_k \to y \in X$, dann folgt aus $R(\lambda; A)^\alpha(-A)^\alpha x_k = [I - \lambda R(\lambda; A)]^\alpha x_k$ (für ein beliebiges festes $\lambda > 0$) mit $k \to \infty$, daß $R(\lambda; A)^\alpha y = [I - \lambda R(\lambda; A)]^\alpha x = (-A)^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x$ und somit $y = (\lambda I - A)^\alpha (-A)^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x = (-A)^\alpha x$ und $x \in D((-A)^\alpha)$. □

Bemerkung: Um zu verstehen, warum die Definition auch für andere Werte von m funktioniert, kann man mit Hilfe des Funktionalkalküls aus Gleichung (3.7)—oder auch direkt—die Beziehung

$$\int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m x \, d\lambda = (-A)^\alpha \sum_{i=\alpha}^{m-1} c_{\alpha,m,i}\,[NR(N; A)]^i x$$

für $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, beweisen.

3.5 Eine Inversionsformel

Wir wollen uns nun dem Beweis der Potenzgesetze zuwenden, beginnend mit $(-A)^\alpha(-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta}$. Dazu ist es zunächst wichtig zu zeigen, daß für $0 < \alpha < \beta \quad D((-A)^\beta) \subset D((-A)^\alpha)$ ist, es ist also nötig, den Integranden im definierenden Integral von (3.12) abzuschätzen. Beweisen wir zu diesem Zweck eine Inversionsformel.

Proposition 8 (Inversionsformel). *Für $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$, $N > 0$ und $x \in X$ gilt im Falle $\alpha \notin \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} &N^\alpha[I - NR(N;A)]^m x \\ &\qquad = (-A)^\alpha \sum_{i=n+1}^{m} i \int_0^\infty f_{\alpha,m,i}(\lambda)[NR(N\lambda;A)]^i[I - N\lambda R(N\lambda;A)]x\,d\lambda \end{aligned} \tag{3.14}$$

und im Falle $\alpha \in \mathbb{N}$

$$N^\alpha[I - NR(N;A)]^m x = (-A)^\alpha[NR(N;A)]^\alpha[I - NR(N;A)]^{m-\alpha}x. \tag{3.15}$$

Beweis: Gleichung (3.15) ist offensichtlich. Für Gleichung (3.14) leitet man beide Seiten von Gleichung (3.13) nach N ab erhält so mit Hilfe der Abgeschlossenheit von $(-A)^\alpha$

$$N^{\alpha-1}[I - NR(N;A)]^m x = (-A)^\alpha\, \partial_N\, T_{\alpha,m,N}\, x,$$

falls $\partial_N\, T_{\alpha,m,N}\, x$ existiert.

Dies ist der Fall, denn für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$ ist

$$\begin{aligned} \partial_N[NR(N\lambda;A)]^i &= i\,[NR(N\lambda;A)]^{i-1}[R(N\lambda;A) - N\lambda R(N\lambda;A)^2] \\ &= \tfrac{i}{N}[NR(N\lambda;A)]^i[I - N\lambda R(N\lambda;A)], \end{aligned}$$

so daß man Gleichung (3.14) direkt aus Definition (3.8) durch Differentiation unter dem Integral erhält. □

Proposition 9. *Ist $0 < \beta < \alpha$, so gilt $D((-A)^\alpha) \subset D((-A)^\beta)$, und für alle $x \in D((-A)^\alpha)$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \beta$ existiert das Integral*

$$(-A)^\beta x = C_{\beta,m}^{-1} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1}[I - \lambda R(\lambda;A)]^m x\,d\lambda$$

im Bochnerschen Sinne.

Beweis: Sei zunächst $m > \alpha$. Ist $x \in D((-A)^\alpha)$, so kann man in den Gleichungen (3.14) und (3.15) den Operator $(-A)^\alpha$ direkt an das x ziehen, und wegen $\text{s-lim}_{N\to\infty}[I - N\lambda R(N\lambda;A)](-A)^\alpha x = 0$ für alle $\lambda > 0$ sieht man so, daß

$\|[I - NR(N;A)]^m x\| = o(N^{-\alpha})$ ist mit $N \to \infty$. Folglich existiert das $(-A)^\beta x$ definierende Integral im Bochnerschen Sinne, und die Behauptung ist gezeigt.

Ist nun m beliebig, dann wählen wir ein α' mit $\beta < \alpha' < \min\{m, \alpha\}$. Nach dem bereits Gezeigten ist dann $x \in D((-A)^{\alpha'})$, und die gewünschte Integraldarstellung gilt auch in diesem Fall. □

Bemerkung: In Kapitel 4, Korollar 2 werden wir die eben benutzte Ordnungsabschätzung noch verallgemeinern.

3.6 Das 1. Potenzgesetz: $(-A)^\alpha(-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta}$

Wir zeigen nun das erste Potenzgesetz und demonstrieren dabei zugleich erneut die Leistungsfähigkeit des Funktionalkalküls, der es uns ohne Probleme ermöglicht, eine Operatorgleichung mit Dreifachintegralen zu beweisen.

Satz 4. *Für $\alpha, \beta > 0$ ist $(-A)^\alpha(-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta}$.*

Das heißt: Ein $x \in X$ ist genau dann in $D((-A)^{\alpha+\beta})$, wenn $x \in D((-A)^\beta)$ und $(-A)^\beta x \in D((-A)^\alpha)$ ist, und in diesem Fall ist $(-A)^\alpha(-A)^\beta x = (-A)^{\alpha+\beta}x$.

Beweis: Wir wählen ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \alpha + \beta$ und beweisen für alle $x \in X$ und alle $M, N, P > 0$ die Operatorgleichung

$$\begin{aligned} T_{\alpha+\beta,m,P} \int_0^M \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda;A)]^m d\lambda \int_0^N \nu^{\beta-1}[I - \nu R(\nu;A)]^m x\, d\nu \\ = T_{\beta,m,N}\, T_{\alpha,m,M} \int_0^P \lambda^{\alpha+\beta-1}[I - \lambda R(\lambda;A)]^m x\, d\lambda. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Für die Multiplikationsoperatoren folgt die Behauptung sofort aus den Gleichungen (3.6) und (3.7), danach folgt die Behauptung wieder wie schon beim Beweis von Proposition 4 durch Ausmultiplizieren der Terme $[I - \lambda R(\lambda;A)]^m$ und anschließendes Anwenden des Funktionalkalküls.

Ist nun $x \in D((-A)^{\alpha+\beta})$, so ist nach Proposition 9 auch $x \in D((-A)^\beta)$. Führt man also nacheinander in Gleichung (3.16) die Grenzübergänge $N \to \infty$ und $P \to \infty$ aus, so erhält man

$$\int_0^M \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda;A)]^m (-A)^\beta x\, d\lambda = T_{\alpha,m,M}\, (-A)^{\alpha+\beta}x.$$

Wegen Proposition 3 ist daher $(-A)^\beta x \in D((-A)^\alpha)$ und $(-A)^\alpha(-A)^\beta x = (-A)^{\alpha+\beta}x$.

Ist $x \in D((-A)^\beta)$ und $(-A)^\beta x \in D((-A)^\alpha)$, so kann man nacheinander die Grenzübergänge $N \to \infty$ und $M \to \infty$ ausführen und erhält

$$T_{\alpha+\beta,m,P}\, (-A)^\alpha(-A)^\beta x = \int_0^P \lambda^{\alpha+\beta-1}[I - \lambda R(\lambda;A)]^m x\, d\lambda$$

und daher $x \in D((-A)^{\alpha+\beta})$ und $(-A)^{\alpha+\beta}x = (-A)^\alpha(-A)^\beta x$. □

3.7 Das 2. Potenzgesetz: $((-A)^\alpha)^\beta = (-A)^{\alpha\beta}$

Bei der Betrachtung des zweiten Potenzgesetzes $((-A)^\alpha)^\beta = (-A)^{\alpha\beta}$ stellt sich zuerst die Frage, wann sichergestellt ist, daß $-(-A)^\alpha \in \mathcal{K}_0$ ist. Es ist schon in verschiedenen Abhandlungen gezeigt worden, daß es reicht, $0 < \alpha \leq 1$ zu fordern. Wir wollen zeigen, wie man dies mit Hilfe der Operatoren $T_{\alpha,m,N}$ beweisen kann.

In diesem Zusammenhang werden gewöhnlich für alle $\lambda > 0$ und $0 < \alpha < 1$ die Funktionen

$$g_{\lambda,\alpha}(u) := C_{\alpha,1}^{-1}\, u^\alpha \big(\lambda^2 + 2\lambda u^\alpha \cos \pi\alpha + u^{2\alpha}\big)^{-1} \qquad (u > 0)$$

definiert und bewiesen, daß $g_{\lambda,\alpha} > 0$ sowie

$$\int_0^\infty g_{\lambda,\alpha}(u) \tfrac{1}{u+s} du = \tfrac{1}{\lambda + s^\alpha} \qquad (s \geq 0) \tag{3.17}$$

gilt für alle $\lambda > 0$ und $0 < \alpha < 1$. Damit wird man auf das folgende Lemma geführt.

Lemma 12. *Ist $A \in \mathcal{K}_0$ und $0 < \alpha < 1$, so ist auch $-(-A)^\alpha \in \mathcal{K}_0$ und*

$$R(\lambda; -(-A)^\alpha) = \int_0^\infty g_{\lambda,\alpha}(u) R(u; A) du \qquad \forall \lambda > 0.$$

Beweis: $-(-A)^\alpha$ ist nach Korollar 1 dicht definiert, es muß also nur die Aussage über deren Resolvente gezeigt werden.

Anhand von Satz 3 sieht man, daß man zum Beweis der Formel

$$\big[\lambda + (-A)^\alpha\big] \int_0^\infty g_{\lambda,\alpha}(u) R(u; A) du\, C_{\alpha,1}^{-1} T_{\alpha,1,N} = C_{\alpha,1}^{-1} T_{\alpha,1,N} \qquad (\lambda, N > 0)$$

das Funktionalkalkül aus Kapitel 2 anwenden kann. Es reicht also, sie für die Multiplikationsoperatoren zu zeigen, für die sie nach Gleichung (3.17) offensichtlich gilt.

Wendet man sie nun auf ein beliebiges $x \in X$ an, so erhält man mit $N \to \infty$

$$\big[\lambda + (-A)^\alpha\big] \int_0^\infty g_{\lambda,\alpha}(u) R(u; A) du\, x = x$$

für alle $x \in X$. Durch Vertauschen beider Operatoren im Falle $x \in D((-A)^\alpha)$ erhält man so die Behauptung. $\square$

Lemma 13. *Für $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < m \in \mathbb{N}$, $M, N > 0$ und alle $x \in X$ gilt die Gleichung*

$$T_{\alpha\beta,m,M} \int_0^N \lambda^{\beta-1}[I - \lambda R(\lambda; -(-A)^\alpha)]^m d\lambda\, x \\ = T_{\beta,m,N}^{-(-A)^\alpha} \int_0^M \lambda^{\alpha\beta-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m d\lambda\, x, \quad (3.18)$$

wobei die Schreibweise $T_{\beta,m,N}^{-(-A)^\alpha}$ angeben soll, daß sich der Operator auf $-(-A)^\alpha$ anstelle von A beziehen soll.

Beweis: Anhand der einfachen Umformung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i\,; -(-A)^{\varepsilon_{n,i}})^{k_{n,i}} & \\ = \; & \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \prod_{i=1}^{m_n} \Big(\int_0^\infty du\, g_{\lambda_i,\varepsilon_{n,i}}(u)\, R(u; A) \Big)^{k_{n,i}} \\ = \; & \int_{\mathbb{R}_+^{|\vec{k}_n|}} d\vec{u} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \prod_{i=1}^{m_n} \prod_{j=1}^{k_{n,i}} g_{\lambda_i,\varepsilon_{n,i}}(u_{i,j})\, R(u_{i,j}; A), \quad (3.19) \end{aligned}$$

—wobei im Falle $\varepsilon_{n,i} = 1$ der Ausdruck $du\, g_{\lambda_i,\varepsilon_{n,i}}(u)$ als $d\delta_{\lambda_i}(u)$ zu lesen ist— sieht man, daß sich die Resolventen im Funktionalkalkül nicht alle auf denselben Operator A beziehen müssen, sondern auch zu den Negativen $-(-A)^{\varepsilon_{n,i}}$ von unterschiedlichen Potenzen von $(-A)$ gehören dürfen ($0 < \varepsilon_{n,i} \leq 1$). Für nähere Erläuterungen dazu siehe Abschnitt 5.3.

Es reicht also wieder, Gleichung (3.18) nur für die Multiplikationsoperatoren zu zeigen. Da sie in diesem Fall

$$s^{-\alpha\beta} \int_0^M \lambda^{\alpha\beta-1}\big(1 - \tfrac{1}{\lambda+s}\big)^m d\lambda \int_0^N \lambda^{\beta-1}\big(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s^\alpha}\big)^m d\lambda \\ = (s^\alpha)^{-\beta} \int_0^N \lambda^{\beta-1}\big(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s^\alpha}\big)^m d\lambda \int_0^M \lambda^{\alpha\beta-1}\big(1 - \tfrac{1}{\lambda+s}\big) d\lambda$$

lautet, ist Gleichung (3.18) bewiesen. □

Mit dem üblichen Verfahren können wir nun das zweite Potenzgesetz beweisen.

Satz 5. *Für $0 < \alpha \leq 1$ und $\beta > 0$ ist $((-A)^\alpha)^\beta = (-A)^{\alpha\beta}$, d. h. Definitionsbereiche und Funktionswerte dieser beiden Operatoren stimmen überein.*

Beweis: Für $\alpha = 1$ ist die Behauptung klar, sei also $0 < \alpha < 1$. Ist dann $x \in D\big(((-A)^\alpha)^\beta\big)$, so können wir in (3.18) den Grenzübergang $N \to \infty$ ausführen und erhalten

$$T_{\alpha\beta,m,M}((-A)^\alpha)^\beta x = \int_0^M \lambda^{\alpha\beta-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m d\lambda\, x.$$

Also ist $x \in D((-A)^{\alpha\beta})$ und $(-A)^{\alpha\beta}x = ((-A)^\alpha)^\beta x$.

Im Fall $x \in D((-A)^{\alpha\beta})$ geht man analog mit $M \to \infty$ vor. $\square$

Kapitel 4

Approximation gebrochener Potenzen mittels der Yosida-Approximation

4.1 Motivation

Das Ziel von Kapitel 5 wird es sein, den Funktionalkalkül derart auszuweiten, daß er auch gebrochene Potenzen berücksichtigt. Insbesondere soll es möglich sein, daß damit auch kompliziertere Operatorgleichungen, in denen Operatoren $(-A)^\alpha$ vor den Integralen oder auch als einzelne Summanden auftreten, einfach auf die Multiplikationsoperatoren zurückgeführt werden können.

Diese Erweiterung kann ähnlich wie in Lemma 12 mit Hilfe der Operatoren $T_{\alpha,m,N}$ bewiesen werden. Wir wollen jedoch einen anderen Weg vorführen und in diesem Kapitel eine Approximation gebrochener Potenzen vorstellen, die—einmal bewiesen—einen Beweis mit etwa dem gleichen Aufwand ermöglicht:

Wir approximieren die gebrochene Potenz $(-A)^\alpha$ eines beliebigen Operators $A \in \mathcal{K}_0$ durch die gebrochene Potenz $(-A_\lambda)^\alpha$ eines stetigen Operators $A_\lambda \in \mathcal{K}_0$, nämlich durch die der Yosida-Approximation $A_\lambda := A\lambda R(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I$. Diese Approximation könnte es also in gewissen Situationen ermöglichen, Beweise zunächst nur unter Zuhilfenahme der Stetigkeit des Operators A zu führen und anschließend mit einem Grenzwertprozeß auf alle Operatoren $A \in \mathcal{K}_0$ hochzuziehen; Kapitel 5 ist ein Beispiel hierfür.

Die Yosida-Approximation, die bereits beim Beweis des Satzes von Hille-Yosida Verwendung fand (siehe z.B. [12, Abschnitt 1.3]), tauchte bereits etwas verdeckt bei Komatsu auf. Dieser erkannte in [1, I, Prop. 6.2 und 6.3], daß $-R(\lambda; A)$ und $\lambda R(\lambda; A) - I$ in $\mathcal{K}$ sind und die Gleichung $(-A)^\alpha R(\lambda; A)^\alpha = [I - \lambda R(\lambda; A)]^\alpha$ für alle $\alpha > 0$ erfüllen.

Dieses Kapitel basiert letztlich auch auf dieser Gleichung, deren Interpretation, wie sie hier vorgeführt und später benutzt werden wird, scheint jedoch neu zu sein.

Schließlich wird sich die Vermutung als naheliegend erweisen, daß diese Approximation auch einen Zugang zu gebrochenen Potenzen von Operatoren der Klasse $\mathcal{K}_0$ analog zu Kapitel 3 ermöglichen könnte. Mehr dazu in Abschnitt 4.5.

4.2 Überblick über die zu beweisenden Aussagen

Beginnen wir mit einer Auflistung der Hauptaussagen dieses Kapitels:

Satz 6. *Sei $A \in \mathcal{K}_0$. Für alle $\mu > 0$ sei $A_\mu := A\mu R(\mu; A) = \mu^2 R(\mu; A) - \mu I$ die Yosida-Approximation von A. Dann gilt:*

(i) $\forall \mu > 0: \ A_\mu, -R(\mu; A) \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}(X)$

(ii) $\forall \alpha > 0 \ \exists M_{1,\alpha} > 0 \ \forall \mu > 0 : \|(-A_\mu)^\alpha\| \ \leq M_{1,\alpha}\mu^\alpha$
$\forall \alpha > 0 \ \exists M_{2,\alpha} > 0 \ \forall \mu > 0 : \|R(\mu; A)^\alpha\| \leq M_{2,\alpha}\mu^{-\alpha}$

(iii) $\forall \alpha > 0 \ \forall x \in X : \ \lim_{\mu\to\infty}[\mu R(\mu; A)]^\alpha x = x.$

(iv) $\forall \alpha > 0 \ \forall \mu > 0 :$

$$(-A_\mu)^\alpha x = \begin{cases} (-A)^\alpha[\mu R(\mu; A)]^\alpha x & \forall \ x \in X \\ [\mu R(\mu; A)]^\alpha(-A)^\alpha x & \forall \ x \in D((-A)^\alpha) \end{cases}$$

(v) $\forall \alpha > 0 \ \forall x \in D((-A)^\alpha) : \ \lim_{\mu\to\infty}(-A_\mu)^\alpha x = (-A)^\alpha x.$
Der Grenzwert existiert genau dann, wenn $x \in D((-A)^\alpha)$.

Aussage (i) liefert die Grundvoraussetzung, um überhaupt von den gebrochenen Potenzen von $R(\mu; A)$ und $(-A_\mu)$ sprechen zu können. Da diese beiden Operatoren und damit auch ihre gebrochenen Potenzen sogar stetig sind, ist die Aussage (ii) über deren Normen von Interesse. Insbesondere ist für festes $\alpha > 0$ die Operatorenfamilie $\{[\mu R(\mu; A)]^\alpha; \ \mu > 0\}$ gleichmäßig beschränkt, was eine Verallgemeinerung der für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ wegen $A \in \mathcal{K}$ geltenden Aussage ist.

Diese Beschränktheit schließlich wird für den Beweis der Aussage (iii) benötigt, die für natürliche α ebenfalls bereits bekannt ist. Hierbei geht erstmals in diesem Kapitel die Dichtheit von $D(A)$ in X ein.

Mit Hilfe des Funktionalkalküls wird dann Gleichung (iv) gezeigt, und aus den Aussagen (iii) und (iv) und der Abgeschlossenheit von $(-A)^\alpha$ folgt schließlich unmittelbar die Aussage (v).

4.3 Beweis von Satz 6

Beweis von Satz 6 (i):

Wenden wir uns dem Beweis von Teil (i) zu. Da beide Operatoren offensichtlich stetig sind, fehlen allein die Aussagen über deren Resolventen. Wir zeigen nun jeweils eine Darstellung für sie, aus der dann unmittelbar die gewünschte Normabschätzung folgt. Da wir auch später noch von diesen Darstellungen Gebrauch machen werden, fassen wir diese Ergebnisse in einem gesonderten Lemma zusammen.

Wir definieren abkürzend $B_\mu := -R(\mu; A)$ für alle $\mu > 0$ und setzen $M := \sup_{\lambda>0} \|\lambda R(\lambda; A)\|$.

Lemma 14. *Für alle $\lambda, \mu > 0$ ist $\lambda \in \varrho(A_\mu)$ und $\lambda \in \varrho(B_\mu)$, und es gelten die Darstellungen*

$$R(\lambda; A_\mu) = \tfrac{1}{\mu+\lambda} I + \big(\tfrac{\mu}{\mu+\lambda}\big)^2 R\big(\tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}; A\big) \tag{4.1}$$

$$R(\lambda; B_\mu) = \tfrac{1}{\lambda} I - \tfrac{1}{\lambda^2} R\big(\mu + \tfrac{1}{\lambda}; A\big) \tag{4.2}$$

sowie die Abschätzungen

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \le \tfrac{M+1}{\lambda} \tag{4.3}$$

$$\|R(\lambda; B_\mu)\| \le \tfrac{M+1}{\lambda}. \tag{4.4}$$

Beweis: Mit Hilfe der ersten Resolventengleichung erhält man:

$$\begin{aligned}
&(\lambda I - A_\mu) \Big[\tfrac{1}{\mu+\lambda} I + \big(\tfrac{\mu}{\mu+\lambda}\big)^2 R\big(\tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}; A\big)\Big] \\
&\quad= \Big[(\mu+\lambda) I - \mu^2 R(\mu; A)\Big] \Big[\tfrac{1}{\mu+\lambda} I + (\tfrac{\mu}{\mu+\lambda})^2 R\big(\tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}; A\big)\Big] \\
&\quad= I + \tfrac{\mu^2}{\mu+\lambda} \Big[R\big(\tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}; A\big) - R(\mu; A)\Big] - \tfrac{\mu^4}{(\mu+\lambda)^2} R(\mu; A) R\big(\tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}; A\big) \\
&\quad= I + \Big[\tfrac{\mu^2}{\mu+\lambda}\big(\mu - \tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}\big) - \tfrac{\mu^4}{(\mu+\lambda)^2}\Big] R(\mu; A) R\big(\tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}; A\big) \\
&\quad= I.
\end{aligned}$$

Da die beiden Operatoren in der ersten Zeile offensichtlich kommutieren, ist damit Gleichung (4.1) gezeigt. Der Beweis der zweiten Gleichung geht ähnlich:

$$\begin{aligned}
&\big[\lambda I + R(\mu; A)\big] \big[\tfrac{1}{\lambda} I - \tfrac{1}{\lambda^2} R(\mu + \tfrac{1}{\lambda}; A)\big] \\
&\quad= I + \tfrac{1}{\lambda}\big[R(\mu; A) - R\big(\mu + \tfrac{1}{\lambda}; A\big)\big] - \tfrac{1}{\lambda^2} R(\mu; A) R\big(\mu + \tfrac{1}{\lambda}; A\big) \\
&\quad= I + \big[\tfrac{1}{\lambda}(\mu + \tfrac{1}{\lambda} - \mu) - \tfrac{1}{\lambda^2}\big] R(\mu; A) R\big(\mu + \tfrac{1}{\lambda}; A\big) \\
&\quad= I.
\end{aligned}$$

Aus diesen Darstellungen folgen sofort die gewünschten Abschätzungen:

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \le \tfrac{1}{\mu+\lambda} + \big(\tfrac{\mu}{\mu+\lambda}\big)^2 \tfrac{M(\mu+\lambda)}{\mu\lambda} = \tfrac{1}{\mu+\lambda} + \tfrac{\mu}{\mu+\lambda} \tfrac{M}{\lambda} = \tfrac{1+M}{\lambda}$$

sowie

$$\|R(\lambda; B_\mu)\| \le \tfrac{1}{\lambda} + \tfrac{1}{\lambda^2} \tfrac{M}{\mu + \frac{1}{\lambda}} = \tfrac{1}{\lambda}\big(1 + \tfrac{M}{\mu\lambda+1}\big) \le \tfrac{1+M}{\lambda},$$

womit Lemma 14 und Satz 9 (i) bewiesen sind. □

Man beachte hierbei, daß die beiden Oberschranken in (4.3) und (4.4) sogar unabhängig von μ sind, was im nun folgenden Beweis von Bedeutung sein wird. Dieser kann für beide Operatoren parallel geführt werden:

Beweis von Satz 6 (ii):

Für $0 < \alpha < m \in \mathbb{N},\ x \in X,\ N > 0$ und beliebige Operatoren $C \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}(X)$ mit $\sup_{\lambda>0}\|\lambda R(\lambda; C)\| \leq L$ gilt

$$\begin{aligned}
\|(-C)^\alpha x\| &= \left\|C_{\alpha,m}^{-1}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;C)]^m x\,d\lambda\right\| \\
&\leq C_{\alpha,m}^{-1}\int_0^N \lambda^{\alpha-1}\big\|[I-\lambda R(\lambda;C)]^m x\big\|\,d\lambda \\
&\quad + C_{\alpha,m}^{-1}\int_N^\infty \lambda^{\alpha-1}\|R(\lambda;C)^m(-C)^m x\|\,d\lambda \\
&\leq C_{\alpha,m}^{-1}\Big((L+1)^m\|x\|\int_0^N \lambda^{\alpha-1}d\lambda + \|C\|^m\|x\|L^m\int_N^\infty \lambda^{\alpha-m-1}d\lambda\Big) \\
&= C_{\alpha,m}^{-1}\big(\tfrac{1}{\alpha}(L+1)^m N^\alpha + \|C\|^m L^m \tfrac{1}{m-\alpha}N^{\alpha-m}\big)\|x\|.
\end{aligned}$$

Minimiert man nun diesen Ausdruck mit $N := \frac{\|C\|L}{L+1}$, so erhält man:

$$\|(-C)^\alpha\| \leq C_{\alpha,m}^{-1}L^\alpha(L+1)^{m-\alpha}\left(\tfrac{1}{\alpha}+\tfrac{1}{m-\alpha}\right)\|C\|^\alpha = c(\alpha,m,L)\|C\|^\alpha,$$

eine auch für sich genommen interessante Abschätzung. Mit $\|A_\mu\| \leq \mu(M+1)$ und $\|-R(\mu;A)\| \leq M\mu^{-1}$ sowie $L = M+1$ (nach (4.3) und (4.4), insbesondere ist L unabhängig von μ) folgen durch Einsetzen dieser beiden Operatoren für C die Behauptungen in (ii). □

Beweis von Satz 6 (iii):

Sei zunächst $0 < \alpha < 1$. Den allgemeinen Fall beweist man anschließend leicht mit Teil (ii) und dem ersten Potenzgesetz. Wie schon im bekannten Beweis zu $\alpha = 1$ betrachten wir zunächst den Fall $x \in D(A)$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\|[\mu R(\mu;A)]^\alpha x - x\| &= \left\|\mu^\alpha C_{\alpha,1}^{-1}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;B_\mu)]x\,d\lambda - x\right\| \\
&\overset{(4.2)}{=} C_{\alpha,1}^{-1}\left\|\mu^\alpha\int_0^\infty \lambda^{\alpha-2}R\big(\mu+\tfrac{1}{\lambda};A\big)x\,d\lambda - C_{\alpha,1}\,x\right\| \\
&= C_{\alpha,1}^{-1}\left\|\mu\int_0^\infty \lambda^{\alpha-2}R\big(\tfrac{\mu(\lambda+1)}{\lambda};A\big)x\,d\lambda - C_{\alpha,1}\,x\right\| \\
&= C_{\alpha,1}^{-1}\left\|\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}\tfrac{1}{\lambda+1}\Big[\tfrac{\mu(\lambda+1)}{\lambda}R\big(\tfrac{\mu(\lambda+1)}{\lambda};A\big)-I\Big]x\,d\lambda\right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_{\alpha,1}^{-1} \left\| \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \tfrac{1}{\lambda+1} R\big(\tfrac{\mu(\lambda+1)}{\lambda}; A\big) Ax \, d\lambda \right\| \\
&\leq C_{\alpha,1}^{-1} M \|Ax\| \int_0^\infty \tfrac{\lambda^\alpha}{(\lambda+1)^2} d\lambda \cdot \tfrac{1}{\mu} \\
&\to 0 \qquad (\mu \to \infty).
\end{aligned}$$

Wegen $\|[\mu R(\mu; A)]^\alpha\| \leq M_{2,\alpha}$ für $\forall \mu > 0$ folgt aus der Dichtheit von $D(A)$ die Behauptung schließlich für alle $x \in X$.

Sei nun $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist $0 < \frac{\alpha}{m} < 1$, und daher geht

$$[\mu R(\mu; A)]^\alpha x = \underbrace{[\mu R(\mu; A)]^{\frac{\alpha}{m}} \cdots [\mu R(\mu; A)]^{\frac{\alpha}{m}}}_{m-mal} x$$

gegen x mit $\mu \to \infty$, denn die Operatoren $[\mu R(\mu; A)]^{\frac{\alpha}{m}}$ sind gleichmäßig beschränkt bezüglich μ und gehen nach dem bisher Gezeigten punktweise gegen die Identität. □

Beweis von Satz 6 (iv):

Kommen wir nun zum Schlüsselergebnis dieses Abschnittes. Zwar ist die zu zeigende Gleichung bereits bekannt, jedoch soll sie hier mit Hilfe des Kalküls erneut bewiesen werden, auch um zu zeigen, wie die in Kapitel 3 definierten Operatoren $T_{\alpha,m,N}$ auch in weiteren Beweisen eine Rolle spielen können.

Zuerst wollen wir explizite Darstellungen der Operatoren $(-A_\mu)^\alpha$ und $R(\mu; A)^\alpha$ herleiten.

Lemma 15. *Für alle $\mu > 0$ und $0 < \alpha < m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(-A_\mu)^\alpha = C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\mu \lambda^{\alpha-1} \big(1 - \tfrac{\lambda}{\mu}\big)^{m-\alpha-1} [I - \lambda R(\lambda; A)]^m \, d\lambda, \tag{4.5}$$

$$R(\mu; A)^\alpha = C_{\alpha,m}^{-1} \int_\mu^\infty (\lambda - \mu)^{m-\alpha-1} R(\lambda; A)^m \, d\lambda. \tag{4.6}$$

Beweis: Eine Substitution $\nu = \frac{\mu\lambda}{1+\lambda}$, $\lambda = \frac{\nu}{\mu-\nu}$, $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{\mu}{(1+\lambda)^2} = \mu\big(1 - \frac{\nu}{\mu}\big)^2$ ergibt

$$\begin{aligned}
(-A_\mu)^\alpha &= C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [I - \lambda R(\lambda; A_\mu)]^m \, d\lambda \\
&= C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \Big[I - \Big(\tfrac{\lambda}{\mu+\lambda} I + \tfrac{\lambda\mu^2}{(\mu+\lambda)^2} R\big(\tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}; A\big)\Big)\Big]^m \, d\lambda \\
&= C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \big(\tfrac{\mu}{\mu+\lambda}\big)^m \Big[I - \tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda} R\big(\tfrac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}; A\big)\Big]^m \, d\lambda \\
&= C_{\alpha,m}^{-1} \mu^\alpha \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \big(\tfrac{1}{1+\lambda}\big)^m \Big[I - \tfrac{\mu\lambda}{1+\lambda} R\big(\tfrac{\mu\lambda}{1+\lambda}; A\big)\Big]^m d\lambda \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{\alpha,m}^{-1}\,\mu^\alpha \int_0^\mu \left(\tfrac{\nu}{\mu-\nu}\right)^{\alpha-1}\left(\tfrac{\mu-\nu}{\mu}\right)^m [I-\nu R(\nu;A)]^m \mu^{-1}\left(1-\tfrac{\nu}{\mu}\right)^{-2} d\nu \\
&= C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\mu \nu^{\alpha-1}\left(1-\tfrac{\nu}{\mu}\right)^{m-\alpha-1} [I-\nu R(\nu;A)]^m \, d\nu.
\end{aligned}
$$

Bei der zweiten Gleichung hilft die Substitution $\nu = \mu + \frac{1}{\lambda}$, $\lambda = \frac{1}{\nu-\mu}$, $\frac{d\lambda}{d\nu} = -(\nu-\mu)^{-2}$:

$$
\begin{aligned}
R(\mu;A)^\alpha &= C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;B_\mu)]^m \, d\lambda \\
&= C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}[\tfrac{1}{\lambda}R\left(\mu+\tfrac{1}{\lambda};A\right)]^m \, d\lambda \qquad (4.8)\\
&= C_{\alpha,m}^{-1} \int_\mu^\infty (\nu-\mu)^{m-\alpha-1} R(\nu;A)^m \, d\nu. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Nun ist es nicht mehr schwer, für alle $N > 0$ zu zeigen, daß

$$
(-A_\mu)^\alpha \, T_{\alpha,m,N} = \int_0^N \lambda^{\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^m d\lambda \; [\mu R(\mu;A)]^\alpha \qquad (4.9)
$$

gilt, denn nach Einsetzen der eben erhaltenen Darstellungen (4.5) und (4.6) und dem üblichen Ausmultiplizieren der Ausdrücke $[I-\lambda R(\lambda;A)]^m$ sieht man, daß man den Funktionalkalkül anwenden kann und die Gleichung nur noch für die Multiplikationsoperatoren zu zeigen braucht. Für sie lautet die Gleichung nach Einsetzen von (3.6) bzw. (3.7)

$$
\left(\tfrac{s\mu}{\mu+s}\right)^\alpha \cdot s^{-\alpha} \int_0^N \lambda^{\alpha-1}\left(1-\tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^m d\lambda = \int_0^N \lambda^{\alpha-1}\left(1-\tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^m d\lambda \cdot \left(\tfrac{\mu}{\mu+s}\right)^\alpha
$$

und ist folglich für alle $s > 0$ erfüllt. Also gilt Gleichung (4.9) für alle Operatoren $A \in \mathcal{K}_0$.

Läßt man nun in (4.9), angewandt auf ein beliebiges $x \in X$, $N \to \infty$ gehen, so folgt, daß $[\mu R(\mu;A)]^\alpha x \in D((-A)^\alpha)$ ist und $(-A_\mu)^\alpha x = (-A)^\alpha [\mu R(\mu;A)]^\alpha x$ gilt. Für $x \in D((-A)^\alpha)$ kann man dann die letzten beiden Operatoren vertauschen. $\square$

Beweis von Satz 6 (v):

Die Behauptung (v) folgt nun direkt aus den Behauptungen (iii) und (iv) und der Abgeschlossenheit von $(-A)^\alpha$ durch den Grenzwertübergang $\mu \to \infty$ in (iv). $\square$

4.4 Ordnungsabschätzung für $\|[I-\lambda R(\lambda;A)]^\beta x\|$ mit $\lambda\to\infty$

Korollar 2. *Für $0<\alpha<\beta$ und $x\in D((-A)^\alpha)$ gilt die Ordnungsabschätzung*

$$\|[I-\lambda R(\lambda;A)]^\beta x\| = o(\lambda^{-\alpha}) \qquad \textit{mit} \quad \lambda\to\infty.$$

Beweis: Satz 6 (v) liefert uns die Gleichung

$$\lambda^\alpha[I-\lambda R(\lambda;A)]^\beta x = (-\tfrac{1}{\lambda}A_\lambda)^{\beta-\alpha}(-A_\lambda)^\alpha x = [\lambda R(\lambda;A)]^\alpha(-\tfrac{1}{\lambda}A_\lambda)^{\beta-\alpha}(-A)^\alpha x.$$

Nun ist nach Satz 6 (ii) $\sup_{\lambda>0}\|[\lambda R(\lambda;A)]^\alpha\|<\infty$, und es reicht zu zeigen, daß $(-\frac{1}{\lambda}A_\lambda)^{\beta-\alpha}$ punktweise gegen den Nulloperator konvergiert mit $\lambda\to\infty$. Dies ist der Fall, denn mit einer Substitution erhält man aus Darstellung (4.5) für ein beliebiges $m>\beta-\alpha$:

$$(-\tfrac{1}{\lambda}A_\lambda)^{\beta-\alpha} = C^{-1}_{\beta-\alpha,m}\int_0^1 \nu^{\beta-\alpha-1}(1-\nu)^{m-(\beta-\alpha)-1}[I-\lambda\nu R(\lambda\nu;A)]^m y\,d\nu \quad \forall y\in X,$$

und das benötigte Grenzverhalten folgt mit Lebesgue. □

4.5 Einige Anmerkungen

Satz 6 besagt auch, daß für jedes $\alpha>0$

$$\Big[\big\{[\mu R(\mu;A)]^\alpha x;\ x\in X,\ \mu>0\big\}\Big]$$

ein „core“ von $D((-A)^\alpha)$ ist. Ein Vergleich mit den Bemerkungen am Ende von Abschnitt 3.3 legt schließlich den Gedanken nahe, daß es auch möglich sein sollte, ausgehend von der Formel

$$(-A)^\alpha x := \operatorname*{s-lim}_{\mu\to\infty} C^{-1}_{\alpha,m}\int_0^\mu \lambda^{\alpha-1}\big(1-\tfrac{\lambda}{\mu}\big)^{m-\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^m x\,d\lambda = \operatorname*{s-lim}_{\mu\to\infty}(-A_\mu)^\alpha x$$

($0<\alpha<m$, $x\in D((-A)^\alpha)$) mit Hilfe des Funktionalkalküls einen Zugang zu gebrochenen Potenzen analog zu Kapitel 3 zu erhalten.

Die Operatoren $T_{\alpha,m,N}$ würden dabei ersetzt durch

$$T_{\alpha,m,\mu} := C^{-1}_{\alpha,m}\,\mu^\alpha\int_\mu^\infty(\lambda-\mu)^{m-\alpha-1}R(\lambda;A)^m\,d\lambda = [\mu R(\mu;A)]^\alpha.$$

Die Ergebnisse dieses Kapitels würden dann als Beweis dienen, daß diese Definition gebrochener Potenzen zu der in Kapitel 3, also zu der von Komatsu, äquivalent ist.

Im Unterschied zu Kapitel 3 wäre die Unabhängigkeit der Operatoren $(-A)^\alpha$ (und auch der Operatoren $T_{\alpha,m,\mu}$) von m von vornherein offensichtlich, dafür wird man Probleme beim Analogon zu Proposition 9 bekommen.

Ein Vergleich der beiden definierenden Integrale zeigt, daß sich beide nur um einen Faktor $(1-\frac{\lambda}{\mu})^{m-\alpha-1}$ im Integranden unterscheiden, daß also in diesem Kapitel das Integral

$$(-A)^\alpha x = C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]^m x \, d\lambda$$

im Césaroschen Sinne mit Parameter $m-\alpha-1$, in Kapitel 3 hingegen im Cauchyschen Sinne (d. h. im Césaroschen Sinne mit Parameter 0) interpretiert wird.

Der Versuch der Verallgemeinerung von Kapitel 3 auf beliebige Parameter $c > -1$ wäre also ein Ansatzpunkt für weitergehende Untersuchungen.

Kapitel 5

Erweiterung des Funktionalkalküls um gebrochene Potenzen

5.1 Motivation

Wie bereits zu Beginn des vorangegangenen Kapitels angedeutet, wollen wir nun mit Hilfe der dort definierten Approximation gebrochener Potenzen mittels der Yosida-Approximation den in Kapitel 2 entwickelten Funktionalkalkül derart ausweiten, daß in der Funktion $f \in \mathcal{G}$ Faktoren und Summanden a^{α_n} auftreten dürfen, die in Operatoren $(-A)^{\alpha_n}$ übersetzt werden. Derart erhaltene Operatorgleichungen sind dann zunächst auf $D((-A)^{\gamma})$ gültig, wobei $\gamma := \max_n \alpha_n$, sie können dann aber oft mit einem Dichtheitsargument verallgemeinert werden.

In Abschnitt 5.3 werden wir dann zeigen, daß der Kalkül auch gebrochene Potenzen der auftretenden Resolventen zuläßt und daß sich diese auch auf die Operatoren $-(-A)^{\alpha}$ mit unterschiedlichen Werten $0 < \alpha \leq 1$ beziehen dürfen, was die letzte denkbare Erweiterung des Kalküls im Zusammenhang mit der Betrachtung gebrochener Potenzen darstellt.

Doch auch wenn man nicht mit gebrochenen Potenzen von Operatoren arbeitet, kann diese Erweiterung von Nutzen sein. Taucht beispielsweise in einer nur für alle $x \in D(A)$ zu beweisenden Gleichung ein Integral auf, das ähnliche Konvergenzeigenschaften wie der uns nun gut bekannte Ausdruck

$$\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)]x \, d\lambda \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{5.1}$$

hat, so steht man bisher vor einem Problem, denn dieses Integral existiert zwar für $x \in D(A)$ im Bochnerschen Sinne, i. a. jedoch nicht das Integral $\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)] \, d\lambda$. Spaltet man den Ausdruck (5.1) auf in

$$\Big(\int_0^1 \lambda^{\alpha-1}[I - \lambda R(\lambda; A)] \, d\lambda + (-A) \int_1^\infty \lambda^{\alpha-1} R(\lambda; A) \, d\lambda\Big)x, \tag{5.2}$$

so existieren diese beiden Integrale im Bochnerschen Sinne, dafür hat man sich aber nun den Operator $(-A)$ eingehandelt, den der Funktionalkalkül bis jetzt nicht vorsieht, er ist ja nur für stetige Operatoren geeignet. In der erweiterten Fassung werden derartige Ausdrücke keine Probleme mehr bereiten.

Beginnen wir mit der Definition des verallgemeinerten Kalküls.

5.2 Definition des erweiterten Kalküls

Definition 6. *Sei $\mathcal{G}^+$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, die sich in der Form*

$$f(a) = c + \sum_{p=1}^{P} c_p\, a^{\alpha_p} + \sum_{n=1}^{N} a^{\beta_n} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \Big(\frac{1}{\lambda_i + a}\Big)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \qquad (a > 0) \tag{5.3}$$

darstellen lassen, wobei $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist, für alle $p = 1, \dots, P$ $\alpha_p \geq 0$ und $c_p \in \mathbb{C}$ und für alle $n = 1, \dots, N$ $\beta_n \geq 0$, $m_n \in \mathbb{N}$, $\vec{k}_n \in \mathbb{N}^{m_n}$ und μ_n ein komplexes Borel-Maß auf $\mathbb{R}_+^{m_n}$ mit $\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \vec{\lambda}^{-\vec{k}_n}\, d|\mu_n|(\vec{\lambda}) < \infty$ ist.
Für jedes $A \in \mathcal{K}_0$ und jedes $f \in \mathcal{G}^+$ definieren wir auf

$$\begin{aligned} D(f(-A)) \;:=\; & \Big\{ x \in X;\ \exists \text{ eine Darstellung von } f \text{ der Form (5.3) mit} \\ & x \in D((-A)^\gamma) \text{ für } \gamma := \max\{\alpha_1, \dots \alpha_P, \beta_1, \dots, \beta_N\} \Big\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

den Operator $f(-A) : D(f(-A)) \to X$ durch

$$f(-A)\,x := c\,x + \sum_{p=1}^{P} c_p\,(-A)^{\alpha_p} x + \sum_{n=1}^{N} (-A)^{\beta_n} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i; A)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda})\, x, \tag{5.5}$$

falls (5.3) eine beliebige gemäß (5.4) zu $x \in D(f(-A))$ passende Darstellung von f ist. Dabei interpretieren wir $(-A)^0$ als die Identität.

Offensichtlich ist $\mathcal{G}^+ \supset \mathcal{G}$, und für $f \in \mathcal{G}$ ist $f(-A) = \mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f)$. Die Hauptaussage dieses Kapitels ist der folgende Satz:

Satz 7. *(i) Der Operator $f(-A)$ ist wohldefiniert.*

(ii) Für $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{G}^+$ gelten die Rechenregeln

a) $(\alpha f_1 + \beta f_2)(-A)\,x = \alpha \cdot f_1(-A)\,x + \beta \cdot f_2(-A)\,x$
$\forall x \in D(f_1(-A)) \cap D(f_2(-A))$

b) $(f_1 \cdot f_2)(-A)\,x = f_1(-A) \circ f_2(-A)\,x \qquad \forall x \in D((-A)^{\gamma_1+\gamma_2})$,
falls es Darstellungen (5.3) von f_1 und f_2 mit zugehörigen Konstanten γ_1 und γ_2 gibt.

Der angegebene Definitionsbereich $D(f(-A))$ stellt in der Praxis kaum eine Einschränkung dar: Will man nämlich eine konkrete Gleichung $f_1(-A)x = f_2(-A)x$ beweisen, so sind einem zwei Darstellungen f_1 und f_2 der gleichen Funktion gegeben. Kann man nun garantieren, daß die formalen Ausdrücke $f_1(-A)x$ und $f_2(-A)x$ einen Sinn ergeben, und zwar dadurch, daß alle auftretenden Terme $(-A)^{\alpha_p}x$ und $(-A)^{\beta_n}x$ wohldefiniert sind, so kann auch der Funktionalkalkül angewandt werden.

Für die Gleichung aus Satz 6 (iv) müßte also z. B. $x \in D((-A)^\alpha)$ gefordert werden, und es würde dann reichen, die Gleichung für die Multiplikationsoperatoren zu zeigen. Für die vollständige Aussage könnte man dann ein einfaches Dichtheitsargument verwenden.

Die Forderungen an x in Teil (ii) b) sind ebensowenig restriktiv. Es muß allein sichergestellt sein, daß bei konkreten Darstellungen von f_1 und f_2 das Ausmultiplizieren des Operators $f_1(-A) \circ f_2(-A)$ keine Probleme bezüglich der entstehenden Ausdrücke $(-A)^\alpha x$ bereitet.

Doch nun zum Beweis des Satzes: Teil (ii) kann ähnlich wie in der schwächeren Version des Funktionalkalküls bewiesen werden, wobei das erste Potenzgesetz aus Satz 4 benötigt wird. Zum Beweis von Teil (i), also der Unabhängigkeit des $f(-A)$ definierenden Terms von der Darstellung von f, werden wir Satz 8 beweisen, aus dem dann Teil (i) folgt.

Satz 8. *Es seien $A \in \mathcal{K}_0$ und $f \in \mathcal{G}^+$. Definiert man dann $f_\mu(s) := f\left(\frac{s\mu}{s+\mu}\right)$ für alle $s, \mu > 0$, so ist $f_\mu \in \mathcal{G}$ für jedes $\mu > 0$, und es gilt*

$$f(-A_\mu)x = \mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f_\mu)\,x \qquad \forall \mu > 0\ \forall x \in X$$

und folglich

$$f(-A)x = \operatorname*{s-lim}_{\mu\to\infty} \mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f_\mu)\,x. \qquad \forall x \in D(f(-A))$$

Auf unserem jetzigen Wissensstand ist dieser Satz wie folgt zu lesen:

Wählt man eine bestimmte Darstellung von f, so läßt sich der zugehörige definierende Ausdruck von $f(-A_\mu)x$ berechnen durch $\mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f_\mu)x$ und ist folglich nicht mehr von der Darstellung von f abhängig.

Für alle $x \in D(f(-A))$ existiert der (eindeutig bestimmte) Grenzwert dieses Terms für $\mu \to \infty$ und ist gleich dem $f(-A)x$ definierenden Term; dieser ist also ebenfalls unabhängig von der Darstellung von f.

Wir beginnen mit der ersten Teilaussage und benötigen dazu als Vorarbeit die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 16. *Ist $\alpha > 0$ und $f(a) := a^\alpha$ für alle $a > 0$, so ist $f_\mu \in \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f_\mu) = (-A_\mu)^\alpha$ für $\forall \mu > 0$.*

Beweis: Wähle ein beliebiges $m > \alpha$. Zweimaliges Anwenden von (4.5), erst für die Multiplikationsoperatoren, dann für den gegebenen Operator A, liefert uns

$$\begin{aligned} f_\mu(s) &= \left(\tfrac{s\mu}{\mu+s}\right)^\alpha \\ &= C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\mu \lambda^{\alpha-1}\left(1-\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^{m-\alpha-1}\left(1-\tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^m d\lambda \end{aligned}$$

und daher $f_\mu \in \mathcal{G}$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f_\mu) &= C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\mu \lambda^{\alpha-1}\left(1-\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^{m-\alpha-1}[I-\lambda R(\lambda;A)]^m \, d\lambda \\ &= (-A_\mu)^\alpha. \end{aligned}$$

□

Lemma 17. *Für die Funktion $f \in \mathcal{G}$ mit der Darstellung*

$$f(a) := \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \left(\frac{1}{\lambda_i + a}\right)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \qquad (a > 0)$$

ist auch $f_\mu \in \mathcal{G}$ für $\forall \mu > 0$, und es gilt

$$\mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f_\mu) = \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i\,; A_\mu)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}).$$

Beweis: Mit der Darstellung (4.1), angewandt auf die Multiplikationsoperatoren, und der anschließenden Substitution $y_i := \Phi(\vec{\lambda})_i := \frac{\mu\lambda_i}{\mu+\lambda_i}$ für $\forall i = 1, \ldots, m_n$ mit dem zugehörigen transformierten Maß $\nu_n(S) := \mu_n\big(\Phi^{-1}(S)\big)$ (für alle Borel-Mengen $S \in \mathcal{B}\big((0,\mu)^{m_n}\big)$) erhält man

$$\begin{aligned} f_\mu(s) &= f\left(\tfrac{s\mu}{\mu+s}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \left(\frac{1}{\lambda_i + \frac{s\mu}{\mu+s}}\right)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \left[\frac{1}{\mu+\lambda_i} + \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda_i}\right)^2 \frac{1}{\frac{\mu\lambda_i}{\mu+\lambda_i} + s}\right]^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \\ &= \int_{(0,\mu)^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \left[\tfrac{\mu-y_i}{\mu^2} + \left(1-\tfrac{y_i}{\mu}\right)^2 \tfrac{1}{y_i+s}\right]^{k_{n,i}} d\nu_n(\vec{y}) \\ &= \sum_{\substack{\vec{v},\vec{w} \in \{0,\ldots,|\vec{k}_n|\}^{m_n} \\ c_{\vec{v},\vec{w}} \neq 0}} c_{\vec{v},\vec{w}} \int_{(0,\mu)^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \left(\tfrac{\mu-y_i}{\mu^2}\right)^{v_i} \left(1-\tfrac{y_i}{\mu}\right)^{2w_i} \cdot \prod_{i=1}^{m_n} \left(\tfrac{1}{y_i+s}\right)^{w_i} d\nu_n(\vec{y}). \end{aligned}$$

für gewisse Konstanten $c_{\vec{v},\vec{w}} \geq 0$. Im letzten Schritt wurde ausmultipliziert, wobei die Einschränkung $c_{\vec{v},\vec{w}} \neq 0$ unter dem Summenzeichen gemacht werden mußte, da für die übrigen Terme die Existenz des Integrals nicht gesichert ist.

Um zu zeigen, daß $f_\mu \in \mathcal{G}$ ist, fehlen nun allein die Abschätzungen der Betragsintegrale für den $(s = 0)$-Term. Ersetzt man nun s durch 0 und ν_n durch $|\nu_n|$, und verfolgt man dann die eben vollzogenen Rechenschritte wieder zurück, so erhält man als Oberschranke genau

$$\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \vec{\lambda}^{-\vec{k}_n}\, d|\mu_n|(\vec{\lambda}),$$

was wegen $f \in \mathcal{G}$ endlich ist.

Damit ist $f_\mu \in \mathcal{G}$, und man erhält $\mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f_\mu)$, indem man in der letzten Zeile $\frac{1}{y_i+s}$ durch $R(y_i\,;A)$ ersetzt. Wieder verfolgt man alle Rechenschritte zurück und erhält nach abermaligem Anwenden von Gleichung (4.1)

$$\mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f_\mu) = \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i; A_\mu)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}),$$

was zu zeigen war. □

Beweis von Satz 8:

Sei $f \in \mathcal{G}^+$ und $x \in X$ mit einer gemäß (5.4) dazu passenden Darstellung (5.3). Aus Lemma 16 und 17 folgt nun mit Hilfe der Rechenregeln aus Satz 1 (ii) für $\mathcal{G}$, daß $f_\mu \in \mathcal{G}$ ist für alle $\mu > 0$ mit

$$\mathcal{H}_{R(\cdot\,;A)}(f_\mu)x = c\,x + \sum_{p=1}^{P} c_p\,(-A_\mu)^{\alpha_p} x + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i\,; A_\mu)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda})\,(-A_\mu)^{\beta_n} x$$

für alle $x \in X$. Wegen $x \in D((-A)^\gamma)$ für $\gamma = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_P, \beta_1, \dots, \beta_N\}$ erhält man beim Grenzübergang $\mu \to \infty$ aus Gleichung (4.1), Satz 6 (v) und Abschätzung (4.3) für die Voraussetzung des Satzes von Lebesgue den Grenzwert

$$c\,x + \sum_{p=1}^{P} c_p\,(-A)^{\alpha_p} x + \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i\,; A)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda})\,(-A)^{\beta_n} x,$$

was zu beweisen war. □

5.3 Der Funktionalkalkül in der Endfassung

Fixieren wir nun noch die im Beweis von Lemma 13 aufgezeigte Aussage, daß sich die Resolventen in den Integralen des Funktionalkalküls auch auf unterschiedliche Operatoren $-(-A)^{\varepsilon_{n,i}}$ beziehen dürfen. In dieser Schlußform des Kalküls wollen wir gleichzeitig auch gebrochene Potenzen der Resolventen zulassen, was uns in Kapitel 6 noch von Nutzen sein wird.

Satz 9. *(i) Die Klasse* $\mathcal{G}^+$ *ist die Menge aller Funktionen* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *der Form*

$$f(a) = c + \sum_{p=1}^{P} a^{\alpha_p} + \sum_{n=1}^{N} a^{\beta_n} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} \Big(\frac{1}{\lambda_i + a^{\varepsilon_{n,i}}}\Big)^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \qquad (a > 0), \quad (5.6)$$

wobei $c \in \mathbb{C}$ *eine Konstante ist, für alle* $p = 1, \dots, P$ $\alpha_p \geq 0$ *und für alle* $n = 1, \dots, N$ $\beta_n \geq 0$, $m_n \in \mathbb{N}$, $\vec{k}_n \in \mathbb{R}_+^{m_n}$, $\vec{\varepsilon}_n \in (0,1]^{m_n}$ *und* μ_n *ein komplexes Borel-Maß auf* $\mathbb{R}_+^{m_n}$ *mit* $\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \vec{\lambda}^{-\vec{k}_n} \, d|\mu_n|(\vec{\lambda}) < \infty$ *ist.*

(ii) Für alle $A \in \mathcal{K}_0$ *und alle* $f \in \mathcal{G}^+$ *ist dann*

$$\begin{aligned} D(f(-A)) \;&:=\; \Big\{ x \in X;\ \exists \text{ eine Darstellung von } f \text{ der Form (5.6) mit} \\ &\qquad x \in D((-A)^\gamma) \text{ für } \gamma := \max\{\alpha_1, \dots \alpha_P, \beta_1, \dots, \beta_N\} \Big\}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

und der Operator $f(-A)$ *hat die Darstellung*

$$f(-A)\, x := c\, x + \sum_{p=1}^{P} (-A)^{\alpha_p} x + \sum_{n=1}^{N} (-A)^{\beta_n} \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i; -(-A)^{\varepsilon_{n,i}})^{k_{n,i}} d\mu_n(\vec{\lambda})\, x, \quad (5.8)$$

falls (5.6) *eine gemäß* (5.7) *zu* $x \in D(f(-A))$ *passende Darstellung von* f *ist.*

Beweis: Seien zunächst weiterhin die Vektoren $\vec{k}_n \in \mathbb{N}^{m_n}$. Die Verallgemeinerung bezüglich der Variablen $\varepsilon_{n,i}$ wird wie bereits im letzten Abschnitt erwähnt mit der Umformung (3.19) bewiesen: Wendet man sie auf die Multiplikationsoperatoren an, so wird Darstellung (5.6) zu einem Ausdruck der Form (5.3). Bildet man den zugehörigen Ausdruck $f(-A)$ wie in (5.5) und wendet dann erneut Umformung (3.19) an, diesmal bezüglich A, so erhält man die Darstellung (5.8) für $f(-A)$. Die Aussagen über den Definitionsbereich macht man sich ebenfalls auf diese Weise klar.

Ist nun $\vec{k}_n \in \mathbb{R}_+^{m_n}$ beliebig, so führt man die Aussage mit den gleichen Argumenten auf den bis jetzt bewiesenen Fall zurück, diesmal mit der folgenden Umformung, die man für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \max_{n,i} k_{n,i}$ aus Gleichung (4.6) erhält:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \prod_{i=1}^{m_n} R(\lambda_i; -(-A)^{\varepsilon_{n,i}})^{k_{n,i}} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\mu_n(\vec{\lambda}) \prod_{i=1}^{m_n} C_{k_{n,i},m}^{-1} \int_{\lambda_i}^{\infty} d\nu_i\, (\nu_i - \lambda_i)^{m-k_{n,i}-1} R(\nu_i; -(-A)^{\varepsilon_{n,i}})^m \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{m_n}} d\vec{\nu} \int_{(0,\nu_1)\times\cdots\times(0,\nu_{m_n})} d\mu_n(\vec{\lambda}) \prod_{i=1}^{m_n} C_{k_{n,i},m}^{-1} (\nu_i - \lambda_i)^{m-k_{n,i}-1} R(\nu_i; -(-A)^{\varepsilon_{n,i}})^m. \end{aligned}$$

□

Kapitel 6

Der Abelsche Ergodensatz im Mittel für Operatoren der Klasse $\mathcal{K}_0$

6.1 Einleitung

In Kapitel 0 wurde bereits angekündigt, daß es mit Hilfe der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse möglich sein wird, viele Beweise nun mit wenig Aufwand auf alle Operatoren der Klasse $\mathcal{K}_0$ hochzuziehen. Ein Beispiel hierfür soll nun vorgeführt werden.

Etwa 1970 startete P.L. Butzer die Untersuchung von Konvergenzraten beim Ergodensatz im Mittel für verschiedene Arten von Operatorfamilien. U. Westphal, damals in seiner Arbeitsgruppe tätig, veröffentlichte 1998 in [9] die Ergebnisse ihrer Untersuchungen über die Konvergenzraten des Approximationsprozesses

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to 0+} \lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x = Px, \qquad x \in X_0 := N(A) \oplus \overline{R(A)},$$

wobei $N(A)$ der Kern von A, $R(A)$ der Wertebereich von A und P die Projektion von X_0 auf $N(A)$ ist.

Dabei ging sie von der Darstellung

$$R(\lambda; A)^\alpha = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} e^{tA} dt$$

aus und mußte sich daher bei A auf Erzeuger einer gleichmäßig beschränkten Halbgruppe beschränken.

Steht einem jedoch der in den Kapiteln 2 und 5 entwickelte Funktionalkalkül zur Verfügung, so ist es nicht mehr schwer, sämtliche Ergebnisse der Arbeit [9] auf den wesentlich allgemeineren Fall $A \in \mathcal{K}_0$ hochzuziehen. Einige der Beweise können ohne jede Modifikation übernommen werden; in solchen Fällen soll hier nur auf die entsprechenden Stellen in [9] verwiesen werden.

6.2 Eine verallgemeinerte Inverse von $(-A)^\alpha$

Ziel soll es zunächst sein, zu zeigen, daß $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} R(\lambda; A)^\alpha$ die Inverse von der Einschränkung von $(-A)^\alpha$ auf $D((-A)^\alpha) \cap \overline{R(A)}$ ist.

Dazu ist etwas Vorarbeit nötig: Wir beginnen mit der Hilfsaussage wie in [9, Prop. 2.2], deren nichttriviale Schritte $(ii) \Rightarrow (iii)$ und $(iii) \Rightarrow (iv)$ jedoch einen neuen Beweis erfordern. Außerdem werden die Normabschätzungen von Satz 6 (ii) benötigt.

Proposition 10. *Für $\alpha > 0$ und $x \in X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $x \in \overline{R((-A)^\alpha)}$,

(ii) $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} \lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x = 0$,

(iii) $x \in \overline{R(A)}$,

(iv) $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} (-A)^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x = x$.

Insbesondere ist also $\overline{R((-A)^\alpha)} = \overline{R(A)}$.

Beweis: Der Schluß $(i) \Rightarrow (ii)$ folgt leicht zuerst für $x \in R((-A)^\alpha)$ mit $\|(-A)^\alpha R(\lambda; A)^\alpha\| = \|[I - \lambda R(\lambda; A)]^\alpha\| \le M_{1,\alpha}$ und anschließend für beliebige $x \in \overline{R((-A)^\alpha)}$ mit Banach-Steinhaus und $\|\lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha\| \le M_{2,\alpha}$.

Für die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$ zeigen wir mit Hilfe der aus (4.8) folgenden Formel

$$\lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha = C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty u^{\alpha-1} \tfrac{1}{(1+u)^m} \Big(\tfrac{\lambda(1+u)}{u} R(\tfrac{\lambda(1+u)}{u}; A) \Big)^m du, \tag{6.1}$$

daß für jedes $x \in X$ und jedes $\lambda > 0$ der folgende nach Voraussetzung mit $\lambda \to 0+$ gegen x konvergierende Ausdruck in $R(A)$ liegt ($m > \alpha$ beliebig):

$$\begin{aligned} x - \lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x &= -C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty u^{\alpha-1} \tfrac{1}{(1+u)^m} \Big[\Big(\tfrac{\lambda(1+u)}{u} R\big(\tfrac{\lambda(1+u)}{u}; A\big) \Big)^m - I \Big] x\, du \\ &= -C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty u^{\alpha-1} \tfrac{1}{(1+u)^m} \Big[\Big(I + AR\big(\tfrac{\lambda(1+u)}{u}; A\big) \Big)^m - I \Big] x\, du \\ &= -C_{\alpha,m}^{-1} \sum_{k=1}^m \tbinom{m}{k} A^k \int_0^\infty u^{\alpha-1} \tfrac{1}{(1+u)^m} R\big(\tfrac{\lambda(1+u)}{u}; A\big)^k x\, du \\ &\in R(A). \end{aligned}$$

Für den Schritt $(iii) \Rightarrow (iv)$ benutzen wir Satz 6 (iv) und Gleichung (4.7). Wegen $\|(-A)^\alpha R(\lambda; A)^\alpha - I\| \le M_{1,\alpha} + 1$ reicht es wieder, nur den Fall $x \in R(A)$ zu betrachten. Sei also $x = Ay$ und $m > \alpha$ beliebig.

$$\begin{aligned}
&\|(-A)^\alpha R(\lambda;A)^\alpha x - x\| \\
&\quad = \quad \|[I - \lambda R(\lambda;A)]^\alpha x - x\| \\
&\quad \overset{(4.7)}{=} \quad \left\| C_{\alpha,m}^{-1} \int_0^\infty u^{\alpha-1} \tfrac{1}{(1+u)^m} \Big(\big[I - \tfrac{\lambda u}{1+u} R\big(\tfrac{\lambda u}{1+u};A\big)\big]^m - I \Big) x \, du \right\| \\
&\quad = \quad C_{\alpha,m}^{-1} \left\| \sum_{k=1}^m \tbinom{m}{k} \int_0^\infty u^{\alpha-1} \tfrac{1}{(1+u)^m} \big(\tfrac{-\lambda u}{1+u}\big)^k R\big(\tfrac{\lambda u}{1+u};A\big)^k Ay \, du \right\| \\
&\quad \leq \quad C_{\alpha,m}^{-1} \sum_{k=1}^m \tbinom{m}{k} \int_0^\infty u^{\alpha-1} \tfrac{1}{(1+u)^m} \underbrace{\big\| \tfrac{\lambda u}{1+u} R\big(\tfrac{\lambda u}{1+u};A\big) \big\|}_{\leq M}{}^{k-1} \tfrac{\lambda u}{1+u} \underbrace{\big\| R\big(\tfrac{\lambda u}{1+u};A\big) Ay \big\|}_{\leq (M+1)\|y\|} du \\
&\quad \leq \quad \lambda \cdot C_{\alpha,m}^{-1} (M+1) \|y\| \sum_{k=1}^m \tbinom{m}{k} M^{k-1} \int_0^\infty u^\alpha \tfrac{1}{(1+u)^{m+1}} \, du \\
&\quad \to \quad 0 \qquad (\lambda \to 0+).
\end{aligned}$$

Der Schritt $(iv) \Rightarrow (i)$ ist klar. □

Damit läßt sich der nun folgende Satz herleiten. Für einen Beweis verweisen wir auf [9, Satz 2.4]. Es ist höchstens anzumerken, daß auch in diesem allgemeinen Fall $\lambda^\alpha R(\lambda;A)^\alpha x = x$ ist für $\forall x \in N(A)$, was für natürliche α sofort eingesehen werden kann und für beliebige $\alpha > 0$ dann aus Gleichung (6.1) folgt.

Satz 10. *Für $A \in \mathcal{K}_0$, $\alpha > 0$ und $x \in X$ gilt:*

(i) $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} \lambda^\alpha R(\lambda;A)^\alpha x$ *existiert genau für $x \in X_0$, und in diesem Fall gilt* $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} \lambda^\alpha R(\lambda;A)^\alpha x = Px$.

(ii) $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} R(\lambda;A)^\alpha x$ *existiert genau dann, wenn es ein Element $y \in D((-A)^\alpha) \cap \overline{R(A)}$ gibt mit $x = (-A)^\alpha y$.*
In diesem Fall ist y eindeutig bestimmt durch $y = \text{s-lim}_{\lambda\to 0+} R(\lambda;A)^\alpha x$.

Definiert man nun $(-A)^\alpha_*$ als die Einschränkung von $(-A)^\alpha$ auf $D((-A)^\alpha) \cap \overline{R(A)}$, dann sieht man anhand von Satz 10 (ii), daß

- $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} R(\lambda;A)^\alpha (-A)^\alpha_* y = y$ für $\forall y \in D((-A)^\alpha_*)$,
- $(-A)^\alpha_* \,\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} R(\lambda;A)^\alpha x = x$ wenn $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+}$ existiert.

Der Operator $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} R(\lambda;A)^\alpha$ ist also die Inverse von $(-A)^\alpha_*$ und wäre daher auch eine geeignete Definition des Operators $(-A)^{-\alpha}$, was hier jedoch nicht näher verfolgt werden soll. Wir erweitern nun diese Inverse auf $N(A) \oplus R((-A)^\alpha_*)$:

Definition 7. *Für $\alpha > 0$ sei der Operator B^α auf $D(B^\alpha) := N(A) \oplus R((-A)^\alpha_*)$ definiert durch $B^\alpha x = y$, wobei y das eindeutig bestimmte Element in $D((-A)^\alpha) \cap \overline{R(A)}$ ist mit $(-A)^\alpha y = x - Px$.*

In der folgenden Proposition sollen einige Eigenschaften des Operators B^α gesammelt werden, die auch schon im Halbgruppenfall galten:

Proposition 11. *Für $\alpha, \beta > 0$ gilt:*

(i) *B^α ist ein abgeschlossener Operator mit $\overline{D(B^\alpha)} = X_0$ und $N(B^\alpha) = N(A)$.*

(ii) $B^\alpha|_{R((-A)_*^\alpha)} = ((-A)_*^\alpha)^{-1}$.

(iii) *Für $x \in X_0$ existiert der Grenzwert* $\text{s-lim}_{\lambda\to 0+} \lambda^{-\alpha}[\lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x - Px]$ *genau für $x \in D(B^\alpha)$. In diesem Fall ist der Grenzwert gleich $B^\alpha x$.*

(iv) *Für $0 < \beta < \alpha$ gilt $D(B^\alpha) \subset D(B^\beta)$, und es ist $B^\beta x = (-A)^{\alpha-\beta} B^\alpha x$ $(x \in D(B^\alpha))$.*

(v) $B^\alpha B^\beta = B^{\alpha+\beta}$.

Hierbei folgt Aussage (iii) direkt aus Satz 10 (ii), die Aussagen (iv) und (v) folgen sofort mit den entsprechenden Aussagen für die gebrochenen Potenzen von $(-A)$.

6.3 Charakterisierung der Konvergenzraten

Als Ziel dieses Kapitels wollen wir nun die Konvergenzgeschwindigkeit von $\lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x$ gegen Pf mit $\lambda \to 0+$ mit Hilfe des zu den Räumen X_0 und $D(B^\alpha)$ gehörenden K-Funktionals charakterisieren, das hier also die Form

$$K(t, x; X_0, D(B^\alpha)) = \inf_{y \in D(B^\alpha)} \{\|x - y\| + t\|B^\alpha y\|\} \qquad (x \in X_0,\ t > 0)$$

annimmt.

Es geht gegen 0 mit $t \to 0+$ für alle $x \in X_0$, und zwar genau dann mit der Ordnung $O(t)$, wenn $x \in \widetilde{D(B^\alpha)}^{X_0}$ ist, das ist die relative Vervollständigung von $D(B^\alpha)$ bezüglich X_0, also die Menge aller $x \in X_0$, zu denen eine Folge $(x_n) \subset D(B^\alpha)$ existiert mit $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ und $\sup_n\|B^\alpha x_n\| < \infty$. Für reflexive Räume X_0 gilt $\widetilde{D(B^\alpha)}^{X_0} = D(B^\alpha)$. Für nähere Informationen siehe [13].

Wir führen also nun zwei Approximationsprozesse ein, einen für den saturierten und einen für den nicht-optimalen Fall in Satz 11 b). Der erste, $G_\alpha(\lambda)$, ist eine direkte Übertragung des entsprechenden Prozesses in [9] und nach kurzer Betrachtung der dort benutzten Beweismethode weitgehend naheliegend. Hier müssen nur die dort genannten Eigenschaften von $G_\alpha(\lambda)$ neu bewiesen werden.

Der zweite, $H_\alpha(\lambda)$, ist dafür umso weniger einsichtig. Dies liegt daran, daß die von diesem Approximationsprozeß erfüllte Gleichung (6.3) ursprünglich vom Halbgruppenfall motiviert wurde und unter wesentlicher Ausnutzung der von A

erzeugten Operatorenhalbgruppe bewiesen wurde. Bei den eigentlich benötigten Eigenschaften dieser Approximation spielt dies jedoch keine Rolle mehr, und mit Hilfe des Funktionalkalküls konnte Gleichung (6.3) auch für den allgemeinen Fall $A \in \mathcal{K}_0$ bewiesen werden.

Letztes Relikt des Halbgruppenfalles ist die sonst nur dort auftauchende Funktion p_α, deren $L(0,\infty)$-Zugehörigkeit spätestens seit [5] bekannt ist.

Lemma 18. *Für $\alpha, \lambda > 0$ und $x \in X_0$ definieren wir*

$$G_\alpha(\lambda)x \;:=\; (-A)^\alpha R(\lambda;A)^\alpha x + Px$$

sowie

$$H_\alpha(\lambda)x \;:=\; x + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \tbinom{\alpha}{j} \left(\tfrac{\lambda}{j}\right)^\alpha R\left(\tfrac{\lambda}{j};A\right)^\alpha x + Px.$$

Dann gilt

(i) $\operatorname{s-lim}_{\lambda\to 0+} G_\alpha(\lambda)x = \operatorname{s-lim}_{\lambda\to 0+} H_\alpha(\lambda)x = x.$

(ii) $G_\alpha(\lambda)x$ *und* $H_\alpha(\lambda)x$ *gehören zu* $D(B^\alpha)$ *und erfüllen* $PG_\alpha(\lambda)x = PH_\alpha(\lambda)x = Px$ *sowie*

$$B^\alpha G_\alpha(\lambda)x = \lambda^{-\alpha}\left[\lambda^\alpha R(\lambda;A)^\alpha x - Px\right] \qquad \textit{und} \tag{6.2}$$

$$B^\alpha H_\alpha(\lambda)x = \lambda^{-\alpha}\, \tfrac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty p_\alpha(u) \left(\tfrac{\lambda}{u}\right)^{2\alpha} R\left(\tfrac{\lambda}{u};A\right)^{2\alpha}(x - Px)\,du, \tag{6.3}$$

$$\textit{wobei} \quad p_\alpha(u) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \tbinom{\alpha}{j} (u-j)_+^{\alpha-1} \;\in L(0,\infty).$$

Beweis: zu (i): Anhand von Definition 5 sieht man, daß $N(A) \subset N((-A)^\alpha)$ ist für alle $\alpha > 0$, und mit Hilfe von Proposition 10 erkennt man dann, daß

$$\begin{aligned} \operatorname*{s-lim}_{\lambda\to 0+} G_\alpha(\lambda)x &= \operatorname*{s-lim}_{\lambda\to 0+} \left[(-A)^\alpha R(\lambda;A)^\alpha \overbrace{(I-P)x}^{\in \overline{R(A)}} + \overbrace{(-A)^\alpha R(\lambda;A)^\alpha Px}^{=0}\right] + Px \\ &= (I-P)x + Px = x. \end{aligned}$$

Bezüglich $H_\alpha(\lambda)x$ bemerkt man zuerst, daß die definierende Summe absolut konvergiert, so daß man den Grenzwert für jeden einzelnen Summanden ausführen darf, und man erhält mit Satz 10 (i):

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to 0+} H_\alpha(\lambda)x = x + Px \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \tbinom{\alpha}{j} + Px = x.$$

zu (ii): Für $PG_\alpha(\lambda)x = PH_\alpha(\lambda)x = Px$ bemerken wir, daß für jeden stetigen mit A kommutierenden Operator C, der auf $N(A)$ mit dem Nulloperator übereinstimmt,

$$PCx = P\underbrace{C(I-P)x}_{\in \overline{R(A)}} + P\underbrace{CPx}_{=0} = 0$$

ist für alle $x \in X_0$ und daß diese Eigenschaften von

$$(-A)^\alpha R(\lambda;A)^\alpha \qquad \text{und} \qquad I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \left(\tfrac{\lambda}{j}\right)^\alpha R\left(\tfrac{\lambda}{j};A\right)^\alpha$$

erfüllt werden.

Gleichung (6.2) zeigt man schnell mit

$$\begin{aligned} G_\alpha(\lambda)x - PG_\alpha(\lambda)x &= (-A)^\alpha R(\lambda;A)^\alpha x = (-A)^\alpha R(\lambda;A)^\alpha (x - Px) \\ &= (-A)^\alpha \left[\lambda^{-\alpha}\left(\lambda^\alpha R(\lambda;A)^\alpha x - Px\right)\right], \end{aligned}$$

Gleichung (6.3) ist um einiges schwieriger zu zeigen. Wir etablieren zunächst die Operatorgleichung

$$\lambda^{-\alpha} \tfrac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (-A)^\alpha \int_0^\infty p_\alpha(u) \left(\tfrac{\lambda}{u}\right)^{2\alpha} R\left(\tfrac{\lambda}{u};A\right)^{2\alpha} z\, du = z + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \left(\tfrac{\lambda}{j}\right)^\alpha R\left(\tfrac{\lambda}{j};A\right)^\alpha z \tag{6.4}$$

für alle $z \in X$. Für Halbgruppenerzeuger A konnte sie bereits im Verlaufe des Beweises zu [9, Lemma 3.2 (ii)] für alle $z \in \overline{R(A)}$ gezeigt werden. Insbesondere gilt sie also für die Multiplikationsoperatoren (für sie ist $\overline{R(A)} = X$). Eine Substitution $\nu = \frac{\lambda}{u}$ auf der linken Gleichungsseite und Umschreiben der rechten auf die Form

$$z + \int_{\mathbb{R}_+} R(u;A)^\alpha \, d\Big(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \left(\tfrac{\lambda}{j}\right)^\alpha \delta_{\frac{\lambda}{j}}\Big)(u)\, z$$

zeigt schließlich, daß der Funktionalkalkül in seiner Form von Abschnitt 5.3 angewandt werden kann. Gleichung (6.4) gilt also zunächst auf $D((-A)^\alpha)$ und mit einem Dichtheitsargument daher auch auf ganz $\overline{D(A)} = X$.

Setzt man nun für gegebenes $x \in X_0$ in (6.4) $z := x - Px$, so folgt

$$\begin{aligned} H_\alpha(\lambda)x - PH_\alpha(\lambda)x &= x + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \left(\tfrac{\lambda}{j}\right)^\alpha R\left(\tfrac{\lambda}{j};A\right)^\alpha x \\ &= (x - Px) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \left(\tfrac{\lambda}{j}\right)^\alpha R\left(\tfrac{\lambda}{j};A\right)^\alpha (x - Px) \\ &\overset{(6.4)}{=} (-A)^\alpha \lambda^{-\alpha} \tfrac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty p_\alpha(u) \left(\tfrac{\lambda}{u}\right)^{2\alpha} R\left(\tfrac{\lambda}{u};A\right)^{2\alpha} (x - Px)\, du. \end{aligned}$$

Da das letzte Integral zu $\overline{R(A)}$ gehört, ist Gleichung (6.3) gezeigt. □

Kommen wir nun zum eigentlichen Ziel dieses Kapitels, nämlich der Verallgemeinerung der Hauptaussage von [9].

Satz 11. *Sei $A \in \mathcal{K}_0$, $\alpha > 0$ und $x \in X_0$. Dann gilt für $\lambda \to 0+$:*

a) $\|\lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x - Px\| = o(\lambda^\alpha)$ *genau für* $x \in N(A)$.

b) Für $0 < \beta \leq \alpha$ *sind äquivalent:*

(i) $\|\lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x - Px\| = O(\lambda^\beta)$

(ii) $K(\lambda^\alpha, x; X_0, D(B^\alpha)) = O(\lambda^\beta)$.

c) Speziell für $\alpha = \beta$ *sind die Aussagen (i) und (ii) in b) auch äquivalent zu*

(iii) $x \in \widetilde{D(B^\alpha)}^{X_0}$

(iii') $x \in D(B^\alpha)$, *falls* X_0 *reflexiv ist.*

Die Aussagen zu $\alpha = \beta$ besagen, daß der betrachtete Grenzwertprozeß $\text{s-lim}_{\lambda \to 0+} \lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha$ auf X_0 mit der Ordnung $O(\lambda^\alpha)$ saturiert ist und daß die Saturationsklasse die relative Vervollständigung von $D(B^\alpha)$ bezüglich X_0 ist. Teil b) für $0 < \beta < \alpha$ behandelt den nicht-optimalen Fall.

Beweis: Teil a) folgt sofort aus Proposition 11 (iii), Teil c) ist eine direkte Folgerung aus der zu Anfang genannten Eigenschaft des K-Funktionals.

Der Beweis zu b) folgt nun ganz analog zu [9] mit den Approximationsprozessen aus Lemma 18. Der Vollständigkeit halber wollen wir an dieser Stelle nur kurz den Beweis des Schrittes $(i) \Rightarrow (ii)$ für $0 < \beta < \alpha$ skizzieren, für den wir die Approximation $H_\alpha(\lambda)$ benötigen, die wir schon in Lemma 18 etwas genauer betrachtet hatten (für den Fall $\beta = \alpha$ wird dann die Approximation $G_\alpha(\lambda)$ benötigt, mit einer anderen Beweistechnik).

Es gelte für ein $x \in X_0$

$$\|\lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha x - Px\| \leq C\lambda^\alpha \qquad (0 < \lambda < \lambda_0). \tag{6.5}$$

Man beginnt wie üblich mit

$$K(\lambda^\alpha, x; X_0, D(B^\alpha)) \leq \|x - H_\alpha(\lambda)x\| + \lambda^\alpha \|B^\alpha H_\alpha(\lambda)x\|$$

und schätzt dann die Einzelterme weiter ab. Zunächst ist

$$\|x - H_\alpha(\lambda)x\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\tbinom{\alpha}{j}\right| \left\| \left(\tfrac{\lambda}{j}\right)^\alpha R\left(\tfrac{\lambda}{j}; A\right)^\alpha x - Px \right\| \leq \lambda^\alpha C \sum_{j=1}^{\infty} \left|\tbinom{\alpha}{j}\right|$$

für $0 < \lambda < \lambda_0$, dann zeigt man auch, daß

$$\lambda^\alpha \|B^\alpha H_\alpha(\lambda)x\| \leq M_{2,\alpha} \tfrac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty |p_\alpha(u)| \left\| \left(\tfrac{\lambda}{u}\right)^\alpha R\left(\tfrac{\lambda}{u}; A\right)^\alpha x - Px \right\| du$$

ebenfalls von der gewünschten Ordnung ist, wobei (6.5), aber auch die Abschätzung

$$\|\lambda^\alpha R(\lambda; A)^\alpha - P\| \leq M_{2,\alpha} + \|P\|$$

benutzt werden (P ist stetig, da $N(A)$ und $\overline{R(A)}$ abgeschlossen sind). Details findet man in [9, Beweis zu Satz 3.3]. □

Anhang A

Die Notwendigkeit höherer Resolventenpotenzen bei den Operatoren $T_{\alpha,m,N}$

In den Kapiteln 2 und 3 wurde erheblicher Aufwand getrieben, um einen funktionierenden Ansatz für die Operatoren $T_{\alpha,m,N}$ zu entwickeln. Dieses Kapitel soll dies nun rechtfertigen, indem bewiesen wird, daß der in der Arbeit [3] von Hövel und Westphal verwendete Ansatz der Form

$$T_{\alpha,m,N} := \int_0^\infty p_{\alpha,m}(\lambda) N R(N\lambda; A)\, d\lambda$$

für $\alpha > 1$ i. a. nicht zum Erfolg führen kann: Es wird gezeigt, daß es keine Funktion p_α mit $\lambda^{-1} p_\alpha(\lambda) \in L(0,\infty)$ gibt, so daß für alle $A \in \mathcal{K}_0$ und alle $x \in X$ die Gleichung

$$(-A)^\alpha \int_0^\infty p_\alpha(\lambda) N R(N\lambda; A) x\, d\lambda = \int_0^N \lambda^{\alpha-1} [I - \lambda R(\lambda; A)]^{n+1} x\, d\lambda \qquad \text{(A.1)}$$

gilt, wobei wieder $\mathbb{N} \ni n \leq \alpha < n+1$ gewählt wird. Werte $m \neq n+1$ sollen hier nicht betrachtet werden, da sie zusätzlichen Aufwand erfordern würden.

Der Beweis wird indirekt geführt, zunächst nur für den Fall $\alpha \notin \mathbb{N}$. Angenommen, es gibt eine solche Funktion p_α. Insbesondere gilt dann Gleichung (A.1) auch für die Multiplikationsoperatoren, und für $N = 1$ folgt

$$s^\alpha \int_0^\infty p_\alpha(\lambda) \tfrac{1}{\lambda+s}\, d\lambda = \int_0^1 \lambda^{\alpha-1} \left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{n+1} d\lambda \qquad \forall s > 0. \qquad \text{(A.2)}$$

Gleichung (3.5) und Einsetzen der Definition von $f_{\alpha,n+1,n+1} =: f$ liefert damit

$$\int_0^\infty p_\alpha(\lambda) \tfrac{1}{\lambda+s}\, d\lambda = L\big(\tfrac{t^n}{n!} \widehat{f}(t)\big)(s) \qquad \forall s > 0.$$

Die linke Seite ist nun die Stieltjestransformierte von p_α an der Stelle s, also $L(L(p_\alpha))(s)$. Der Eindeutigkeitssatz der Laplacetransformation besagt nun in einem ersten Schritt

$$\widehat{p}_\alpha(t) = \tfrac{t^n}{n!}\widehat{f}(t) \qquad\qquad \forall t > 0.$$

Faßt man nun p_α und f als reguläre Distributionen auf, so ist mit f auch $D^n f$ distributionell Laplace-transformierbar, und es gilt

$$\tfrac{1}{n!}L(D^n f)(t) = \tfrac{t^n}{n!}\widehat{f}(t) = \widehat{p}_\alpha(t) \quad \forall t > 0, \quad \text{also } \tfrac{1}{n!}D^n f = p_\alpha.$$

Nun ist f auf $(0,1)$ bereits im klassischen Sinne n-mal differenzierbar, wie gleich gezeigt wird, also ist die Einschränkung von $\frac{1}{n!}D^n f$ auf $\mathcal{D}((0,1))$ eine reguläre Distribution, die sowohl von $\frac{1}{n!}\partial^n f$ als auch von p_α repräsentiert wird, d. h. es ist $\frac{1}{n!}\partial^n f = p_\alpha$ fast überall auf $(0,1)$.

Wir erzielen nun den gesuchten Widerspruch, indem wir zeigen, daß $\partial^n f$ (im Gegensatz zu p_α) nicht auf $(0,1)$ integrierbar ist.

Zeigen wir nun also eine geeignete Darstellung von f auf $(0,1)$, die es uns ermöglicht, $\partial^n f$ auszurechnen und in nur einem einzigen Term auszudrücken. Wir starten mit der Darstellung von f aus Proposition 1:

$$\begin{aligned} f(u) &= c\int_0^u (u-t)^{n-\alpha}(1-t)^{\alpha-(n+1)}t^n dt \\ &= \tfrac{c}{|u-1|}\int_0^u \left(\tfrac{t}{1-t}\right)^n (1-t)\left(\tfrac{1-t}{u-t}\right)^\alpha (u-t)^n \tfrac{dt|u-1|}{(1-t)^2} \qquad (0 < u < 1), \end{aligned}$$

wobei $c := \left[\Gamma\big(n+1-\alpha\big)\,\Gamma(\alpha-n)\right]^{-1}$. Die letzte Umformung diente zur Vorbereitung der nun folgenden Substitution $y := \frac{u-t}{1-t} = 1 + \frac{u-1}{1-t}$

$$\Rightarrow\ t = \tfrac{u-y}{1-y}, \quad 1-t = \tfrac{1-u}{1-y}, \quad \tfrac{t}{1-t} = \tfrac{u-y}{1-u}, \quad u-t = y\,\tfrac{1-u}{1-y}, \quad dy = \tfrac{dt(u-1)}{(1-t)^2}.$$

Mit ihr erhalten wir

$$\begin{aligned} f(u) &= \tfrac{c}{|u-1|}\int_0^u \left(\tfrac{u-y}{1-u}\right)^n \tfrac{1-u}{1-y} y^{-\alpha} y^n \left(\tfrac{1-u}{1-y}\right)^n dy \\ &= c\int_0^u y^{n-\alpha}\tfrac{(u-y)^n}{(1-y)^{n+1}}dy \qquad\qquad (0 < u < 1). \end{aligned}$$

So lassen sich die Ableitungen von f wunderbar einfach ausdrücken:

$$\begin{aligned} f'(u) &= c\Big(\partial_u\int_0^u y^{n-\alpha}\tfrac{(u'-y)^n}{(1-y)^{n+1}}dy + \partial_u\int_0^{u'} y^{n-\alpha}\tfrac{(u-y)^n}{(1-y)^{n+1}}dy\Big)\Big|_{u'=u} \\ &= c\Big(u^{n-\alpha}\tfrac{(u'-u)^n}{(1-u)^{n+1}} + \int_0^{u'}\partial_u\, y^{n-\alpha}\tfrac{(u-y)^n}{(1-y)^{n+1}}dy\Big)\Big|_{u'=u} \\ &= c\Big(0 + n\int_0^u y^{n-\alpha}\tfrac{(u-y)^{n-1}}{(1-y)^{n+1}}dy\Big) \\ \overset{(v.I.)}{\Rightarrow}\ \partial^m f(u) &= \tfrac{c\,n!}{(n-m)!}\int_0^u y^{n-\alpha}\tfrac{(u-y)^{n-m}}{(1-y)^{n+1}}dy \qquad (m = 0,\ldots,n). \end{aligned}$$

Im ersten Rechenschritt wurde beim ersten Term der Hauptsatz verwendet, beim zweiten Term durften Differentialoperator und Integral vertauscht werden, da der Betrag der Ableitung des Integranden für alle $u \in [0, u_0]$ $(0 < u_0 < 1)$ abgeschätzt werden kann durch

$$y^{n-\alpha} \tfrac{(u_0+y)^{n-1}}{(1-y)^{n+1}} \in L(0, u').$$

Inbesondere gilt also

$$\partial^n f(u) = c\, n! \int_0^u y^{n-\alpha} \tfrac{1}{(1-y)^{n+1}} dy.$$

Damit kann man nun leicht das Verhalten von $\partial^n f(u)$ für $u \to 1-$ zeigen:

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to 1-} (1-u)^n \partial^n f(u) &= \lim_{u \to 1-} \frac{\overbrace{\partial^n f(u)}^{\to\infty}}{\underbrace{(1-u)^{-n}}_{\to\infty}} \overset{l'Hosp.}{=} \lim_{u \to 1-} \frac{c\, n!\, \frac{u^{n-\alpha}}{(1-u)^{n+1}}}{-n(1-u)^{-n-1}} \\
&= -c\,(n-1)!,
\end{aligned}$$

d.h. $\partial^n f(u) = O(\frac{1}{(1-u)^n})$ für $u \to 1-$. (Die Anwendbarkeit von l'Hospital ist nur für $n \neq 0$ gegeben, für $n = 0$ ist $f(u) = O(\ln(1-u))$ für $u \to 1-$, und f ist auf $(0,1)$ integrierbar.)

Für $n \geq 1$ ist f also nicht auf $(0,1)$ integrierbar, und der Beweis für den Fall $\alpha \notin \mathbb{N}$ ist erbracht.

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ hat man es etwas leichter: Die Gleichungen (A.2) und (3.2) sowie Lemma 9 führen auf

$$\begin{aligned}
L(L(p_\alpha))(s) &= \int_0^\infty p_\alpha(t) \tfrac{1}{t+s} dt = \int_s^\infty \widehat{g}(t)\, dt = L(t^{-1} g(t))(s) \qquad \forall s > 0 \\
\Rightarrow\ L(p_\alpha)(t) &= t^{-1} g(t) = \tfrac{t^{n-1}}{n!} e^{-t} = \tfrac{1}{n!} L(D^{n-1}\delta_1)(t) \qquad \forall t > 0,
\end{aligned}$$

wobei δ_1 die in den Punkt 1 verschobene Deltadistribution ist (zum Zusammenspiel von Laplacetransformation und δ-Distribution siehe [10, Beispiel 8.3-1]). Faßt man wieder p_α als reguläre Distribution auf, so folgt

$$p_\alpha = \tfrac{1}{n!} D^{n-1} \delta_1,$$

was sicherlich nicht richtig sein kann, denn $D^{n-1}\delta_1$ ist nicht regulär—Widerspruch. □

Bemerkung: Dieser Beweis lieferte gleichzeitig die Hauptidee bei der Suche nach einem Ersatzansatz. Interpretiert man nämlich $\int_0^\infty p_\alpha(\lambda) \frac{1}{\lambda+s} d\lambda$ als

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{n!} f(\lambda)(-\partial_\lambda)^n \tfrac{1}{\lambda+s}\, d\lambda \qquad \text{bzw. als} \qquad \tfrac{1}{n!}(-\partial_\lambda)^{n-1} \tfrac{1}{\lambda+s}\Big|_{\lambda=1},$$

so wird man genau auf die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (3.6) und (3.7) geführt. Die Beweisschritte in Abschnitt 3.2 formulieren diese Idee sauber aus und verallgemeinern sie auch auf die Werte $m \neq n + 1$.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{R}_+$	$(0,\infty)$
$\lvert\vec{k}\rvert$	$k_1+\cdots+k_n$, falls $\vec{k}\in\mathbb{N}_0^n$
$\vec{k}-c$	$(k_1-c,\ldots,k_n-c)$, falls $\vec{k}\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}$
$\vec{\lambda}^{\vec{k}}$	$\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}$, falls $\vec{\lambda}\in\mathbb{R}_+^n$, $\vec{k}\in\mathbb{R}^n$
$D^{\vec{k}}$	$\partial_1^{k_1}\cdots\partial_n^{k_n}$, falls $\vec{k}\in\mathbb{N}_0^n$
$L(X)$	die Menge aller stetigen linearen Operatoren $B: X\to X$
$\varrho(A)$	$\{\lambda\in\mathbb{C};\ (\lambda I-A)^{-1}$ existiert und ist stetig$\}$, falls $A: D(A)\subset X\to X$ linear
$R(\lambda;A)$	$(\lambda I-A)^{-1}$, falls $\lambda\in\varrho(A)$
$\mathcal{K}$	$\{A: D(A)\to X;\ A$ abgeschl., $\mathbb{R}_+\subset\varrho(A),\ \sup_{\lambda>0}\lVert\lambda R(\lambda;A)\rVert<\infty\}$
$\mathcal{K}_0$	$\{A\in\mathcal{K};\ \overline{D(A)}=X\}$
$\mathcal{D}(\mathbb{R})$	die Menge aller Funktionen $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger
$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$	die Menge aller Distributionen
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	die Menge aller stark fallenden Funktionen (s. Kap. 1)
$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	die Menge aller temperierten Distributionen (s. Kap. 1)
$\lVert\varphi\rVert_M$	$\sup_{x\in M}\lvert\varphi(x)\rvert$
$\lVert\varphi\rVert_\infty$	$\lVert\varphi\rVert_D$, wenn D den Definitionsbereich von φ bezeichnet
$L(f)=\widehat{f}$	die Laplacetransformierte von f (s. Kap. 1)
$(I^\gamma f)(s)$	$:=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^s(s-t)^{\gamma-1}f(t)\,dt\ (s>0)$, falls $\widehat{f}$ auf $\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,z>0\}$ definiert und $\gamma>0$ ist. Es ist dann $I^\gamma f$ ebenfalls Laplace-transformierbar mit $L(I^\gamma f)(s)=s^{-\gamma}\widehat{f}(s)$ für $\forall s>0$.

Literaturverzeichnis

[1] H. Komatsu, *Fractional powers of operators*, Pacific J. Math. **19** (1966), S. 285-346; II. *Interpolation spaces*, Pacific J. Math. **21** (1967), S. 89-111; III. *Negative Powers*, J. Math. Soc. Japan **21** (1969), S. 205-220; IV. *Potential Operators*, J. Math. Soc. Japan **21** (1969), S. 221-228; V. *Dual Operators*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, **17** (1970), S. 373-396; VI. *Interpolation of non-negative Operators and imbedding theorems*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **19** (1972), S. 1-63.

[2] A.V. Balakrishnan, *Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them*, Pacific J. Math. **10** (1960), S. 419-437

[3] H.W. Hövel und U. Westphal, *Fractional powers of closed operators*, Studia Math. **42** (1972), S. 177-194

[4] U. Westphal, *Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren*, Teil I: *Halbgruppenerzeuger*, Compositio Math. **22** (1970), S. 67-103

[5] U. Westphal, *An approach to fractional powers of operators via fractional differences*, Proc. London Math. Soc. **29**.3 (1974), S. 557-576

[6] F. Hirsch, *Intégrales de résolvantes et calcul symbolique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **22**.4 (1972), S. 239-264

[7] C. Martínez und M. Sanz, *An Extension of the Hirsch Symbolic Calculus*, Potential Analysis **19** (1998), S. 301-319

[8] U. Westphal, *Fractional powers of infinitesimal generators of semigroups*, in: R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific, Singapure 2000 (Kapitel III)

[9] U. Westphal, *A Generalized Version of the Abelian Mean Ergodic Theorem with Rates for Semigroup Operators and Fractional Powers of Infinitesimal Generators*, Result. Math **34** (1998), S. 381-394

[10] A.H. Zemanian, *Distribution theory and transform analysis. An introduction to generalized functions, with applications*, McGraw-Hill Book Company, 1965

[11] T. Schwartz, *Stieltjes-Faltung von Distributionen und gebrochene Potenzen abgeschlossener Operatoren*, Universität Hannover, 2000

[12] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and their applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York 1983

[13] H. Berens, *Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen*, Lecture Notes in Mathematics **64**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1968.

Lebenslauf

Name	:	Matthias Heymann
Geburtsdatum	:	19. April 1977
Geburtsort	:	Frankfurt am Main
Staatsangehörigkeit	:	deutsch

5/1996	:	Abitur mit Leistungsfächern Mathematik und Physik
8/1996 - 8/1997	:	Zivildienst im Landesbildungszentrum für Blinde Hannover
1/1997	:	Endrunde im Bundeswettbewerb Mathematik
10/1997 - 7/1999	:	Studium und Vordiplom im Fach Physik (mit Nebenfach Mathematik) an der Universität Hannover
10/1997 - 11/2001	:	Studium und Diplom im Fach Mathematik (mit Nebenfach Physik) an der Universität Hannover
7/2000	:	Aufnahme in die Studienstiftung des Deutschen Volkes

Hiermit versichere ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Datum Unterschrift

E-Mail: mail@MatthiasHeymann.de Homepage: www.MatthiasHeymann.de